

فصل اول

مقدمه‌ای بر ریاضی پایه

۵ مجموعه‌ی اعداد:

- (۱) مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- (۲) مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{N}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$
- (۳) مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- (۴) مجموعه اعداد گویا: $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1 \right\} = \left\{ \dots, -3, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{8}{3}, \dots \right\}$

یعنی مجموعه اعداد گویا شامل اعداد طبیعی و صحیح نیز هست.

(۵) اعداد گنگ: اعداد گنگ اعدادی هستند که نتوان آن را به شکل $\frac{p}{q}$ درآورد به طوری که

$$p \text{ و } q \text{ اعداد صحیح باشند مانند } \sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$$

بنابراین می‌توان گفت: $Q \cup Q' = \mathbb{R}$ و $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

□ تست ۱) اگر a و b اعداد گویا و $a(\sqrt{2}-1) + b(\sqrt{2}+2) = 6$ باشد، $a-b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

(IQ کاج)

□ تست ۲) چند عدد طبیعی در رابطه $\begin{cases} \sqrt[4]{x} > 2 \\ \sqrt[5]{x} < 3 \end{cases}$ صدق می کند؟

۲۲۸(۴)

۲۲۷(۳)

۲۲۵(۲)

۲۲۶(۱)

چند جمله‌ای ها :

$$P(x) = ax + b$$

فرم کلی چند جمله‌ای درجه ۱ ←

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

فرم کلی چند جمله‌ای درجه ۲ ←

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

فرم کلی چند جمله‌ای درجه ۳ ←

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k \leftarrow x \quad \text{فرم کلی چند جمله‌ای درجه } n \text{ بر حسب } x$$

چند جمله‌ای برابر با صفر:

اگر یک یا چند جمله‌ای برابر با صفر باشد لازم و کافی است که تمام ضرایب آن صفر باشد.

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + k = 0 \leftrightarrow a = 0, b = 0, \dots, k = 0$$

□ تست ۳) اگر به ازاء جميع مقادير x داشته باشیم $0 = 6 - (2a - b)x + b$ ، a کدام است؟

۲ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

دو چند جمله‌ای وقتی با هم برابرند که ضرایب نظیرشان با هم مساوی باشند بنابراین:

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + k = a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + k' \leftrightarrow a = a', b = b', k = k'$$

□ تست ۴) اگر به ازای جميع مقادیر x ، $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ برقرار باشد

$a+b+c$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۵ اتحادهای مهم جبری:

الف) اتحادهای مقدماتی

۱) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\Rightarrow$ اتحاد مربع دو جمله‌ای

۲) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

۳) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$\Rightarrow$ اتحاد مکعب دو جمله‌ای

۴) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

۵) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \Rightarrow$ اتحاد مزدوج

$$۶) (x + y)(x^r - xy + y^r) = x^r + y^r$$

⇒ اتحادهای چاق و لاغر

$$۷) (x - y)(x^r + xy + y^r) = x^r - y^r$$

□ تست ۵) حاصل عبارت $x^{18} - 2x^{16} + x^2 - 1$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چقدر است؟

- ۱) $\sqrt{2} + 1$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

□ تست ۶) حاصل عبارت $(x + a)(x + b) - (x - a)(x - b)$ ، برابر است با:

- ۱) $(a + b)x$ ۲) ۰ ۳) $a + b$ ۴) $2(a + b)x$

□ تست ۷) اگر $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ باشد کدام عبارت عدد صحیح است؟

- (۱) $x^2 - x$ (۲) $x^2 + x$ (۳) $x^2 + 1$ (۴) $x^2 + 2x$

□ تست ۸) حاصل عبارت $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ برابر است با:

- (۱) $x^2 + y^2$ (۲) $x^2 - x^2y^2 + y^2$
(۳) $(x^2 - y^2)$ (۴) $x^2 + x^2y^2 + y^2$

□ تست ۹) اگر $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$ کدام رابطه درست است؟

- (۱) $x^2 + y^2 = 1$ (۲) $x^2 + y^2 = x + y$
(۳) $x^2 + y^2 = 0$ (۴) $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2$

ب) اتحادهای کمکی:

$$۱) x^r + y^r = (x + y)^r - 2xy = (x - y)^r + 2xy$$

$$۲) x^r + y^r = (x + y)^r - 3xy(x + y)$$

$$۳) x^r - y^r = (x - y)^r + 3xy(x - y)$$

□ تست ۱۰) اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد حاصل $x^r + \frac{1}{x^r}$ کدام است؟

۲۵ (۴)

۲۳ (۳)

۱۷ (۲)

۲۰ (۱)

□ تست ۱۱) اگر $x + \frac{1}{x} = a$ حاصل $x^r + \frac{1}{x^r}$ کدام است؟

$a^r + 3$ (۴)

$a^r + 3a$ (۳)

$a^r - 3a$ (۲)

a^r (۱)

□ تست ۱۲) در تجزیه عبارت $x^4 + 64$ کدام عامل وجود دارد؟ (آزمون های گاج)

۴) $x^2 + 4x + 4$

۳) $x^2 + 4x + 8$

۲) $x^2 - 8$

۱) $x^2 + 8$

پاسخ: از اتحاد مربع دو جمله ای بلدیم که $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ پس $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ حال سراغ تجزیه عبارت $x^4 + 64$ می رویم، ببینید:

$$x^4 + 64 = (x^2 + 8)^2 - 2(x^2)(8) = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2$$

الان همگی باید یاد اتحاد مزدوج بیفتیم پس می توان نوشت:

$$x^4 + 64 = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$$

همان طور که می بینید عامل $x^2 + 4x + 8$ در تجزیه عبارت $x^4 + 64$ وجود دارد.

□ تست ۱۳) در تجزیه چند جمله ای $x^8 + x^4 + 1$ کدام عامل وجود دارد؟ (تمرین)

(IQ گاج)

۴) $x^2 + x + 1$

۳) $x^2 + 2x - 1$

۲) $x^2 - x - 1$

۱) $x^2 - 2x + 1$

پاسخ : در نگاه اول تجزیه این عبارت کار بسیار دشوار است ببینید:

$$x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 - x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4$$

حال به کمک اتحاد مربع دو جمله ای گفته شده به جای $x^8 + 2x^4 + 1$ می گذاریم $(x^4 + 1)^2$ پس داریم:

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2$$

از طرفی همگی اتحاد مزدوج را به خوبی می‌شناسیم، پس می‌توان نوشت:

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2)$$

حالا همهٔ داستان‌های قبلی دوباره تکرار می‌شود!

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 - x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) \end{aligned}$$

در نهایت تجزیهٔ چند جمله‌ای $x^8 + x^4 + 1$ به صورت $(x^4 + 1 - x^2)(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$ است. یعنی پاسخ تست گزینه «ع» می‌باشد.

۱۳ محاسبه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک بین چند جمله‌ایها:

ماصل‌ضرب عامل‌های مشترک با کمترین توان = ب.م.م

ماصل‌ضرب عامل‌های غیرمشترک و ماصل‌ضرب عامل‌های مشترک با بیشترین توان = ک.م.م

۱۴ تست ۱۴) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $A = x^2 + 2xy - 15y^2$ و $B = x^2 - 10xy + 21y^2$ کدام است؟

۴ $3x + y$

۳ $3x - y$

۲ $x + 3y$

۱ $x - 3y$

۵۵ چند تست پیرامون اتحادها:

□ تست ۱۵ حاصل عبارت $(\frac{49}{99})^2 - (\frac{50}{101})^2$ برابر است با:

- (۱) $\frac{0}{2}$ (۲) $\frac{0}{0.2}$ (۳) ۲ (۴) هیچکدام

□ تست ۱۶ حاصل عبارت 999×1001 برابر است با: (تمرین)

- (۱) $10^6 + 1$ (۲) 9×10^6 (۳) $10^6 - 1$ (۴) $10^9 - 1$

□ تست ۱۷ مقدار عددی عبارت $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{2^k}+1)$ برابر است با:

- (۱) $2^{2^{k+1}} + 1$ (۲) $2^{2^k} + 1$ (۳) $2^{2^k} - 1$ (۴) $2^{2^{k+1}} - 1$

□ تست ۱۸ حاصل عبارت $(x+1)(x^2-x+1) - (x-1)(x^2+x+1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $2x^2$

□ تست ۱۹) حاصل عبارت تعریف شده $\frac{x}{x+2} + \frac{3}{2-x} + \frac{6x}{x^2-4}$ کدام است؟ (منتشران)

$$\frac{x+3}{x+2} (۱) \quad \frac{x-3}{x-2} (۲) \quad \frac{3}{2} (۳) \quad -\frac{3}{2} (۴)$$

پاسخ: گزینه ۱: مخرج کسر آخر را تجزیه و صورت و مخرج کسر وسط را در یک منفی ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{-3}{x-2} + \frac{6x}{(x-2)(x+2)}$$

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x(x-2) - 3(x+2) + 6x}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - 2x - 3x - 6 + 6x}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 + x - 6}{(x+2)(x-2)}$$

صورت کسر به دست آمده را با اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(x+3)(\cancel{x-2})}{(x+2)(\cancel{x-2})} = \frac{x+3}{x+2}$$

□ تست ۲۰) حاصل عبارت $(x-a)(x+a)(x^2+a^2+ax)(x^2+a^2-ax)$ همواره برابر

است با:

$$x^4 + 2a^2x^2 - a^4 \quad (۲)$$

(۱) صفر

$$x^4 - a^4 \quad (۴)$$

$$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 \quad (۳)$$

□ تست ۲۱ اگر $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$ باشد، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟
(ریاضی داخل ۹۵)

$7\sqrt{2}$ (۴

$6\sqrt{2}$ (۳

۸(۲

۶(۱

□ تست ۲۲ فرض کنید $a = \sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b = \sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ مقدار $(a^2 + b^2 - 2ab)^2(a^2 + b^2 + 2ab)^2$ کدام است؟
(تجربی ۱۴۰۰)

$16(2 - \sqrt{3})$ (۴

$16(2 + \sqrt{3})$ (۳

$4(2 - \sqrt{3})$ (۲

$4(2 + \sqrt{3})$ (۱

قوانین توان:

- ۱) $a^0 = 1$
- ۲) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- ۳) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- ۴) $a^m \times b^m = (ab)^m$
- ۵) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ۶) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
- ۷) $(a^m)^n = a^{m \times n} \rightarrow (a^m)^n \neq a^{m^n}$
- ۸) $(a^m)^n = (a^n)^m$
- ۹) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

□ تست ۲۳ حاصل عبارت $81^2 \times \left[50 \times \left(\frac{3^{-2}}{5} \right)^2 \right]^2$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

□ تست ۲۴ حاصل عبارت $(\sqrt{3})^{-6} \times (9 - 3^{-3})^{-1} \div \frac{(81)^{-0/75}}{242}$ کدام است؟ (تمرین)

(مهر و ماه)

- ۲۲ (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴)

□ تست ۲۵ اگر $a = 3^{x+1}$ و $b = 9^x$ کدام رابطه بین a و b وجود دارد؟

- (۱) $a^2 = 9b$ (۲) $2a = b$ (۳) $2a = b + 1$ (۴) $a^2 = 3b + 1$

□ تست ۲۶ برای دو عدد حقیقی a و b رابطه $a^2 + 9b^2 = 6ab$ برقرار است. مقدار $\frac{b^2 + a^2}{b^2}$ کدام

است؟ (تمرین) (IQ گاج)

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۰

□ تست ۲۷ از رابطه $4^{2x-1} \times 3^{y+2} = 96$ حاصل $\frac{9}{4}(x+y)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

□ تست ۲۸) اگر $a^2 = b^2 + 1$ باشد، حاصل کسر $\frac{b^6 - a^6 + 1}{3a^2b^2}$ کدام است؟ (مهر و ماه)

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) a^4b^4 ۴) ab

□ تست ۲۹) حاصل $(3^{10} + 3^{10})(2^{10} + 2^{10} + 2^{10})$ برابر است با (تمرین)

- ۱) 6^{30} ۲) 36^{20} ۳) 6^{20} ۴) 6^{11} (IQ گاج)

□ تست ۳۰) تفاضل بزرگترین مقسوم‌علیه دو عدد ۱۴۴ و ۴۸۰ از کوچکترین مضرب مشترک

این دو عدد چقدر است؟

- ۱) $2^7 \times 5$ ۲) $2^4 \times 3^2 \times 5$ ۳) $2^4 \times 3 \times 29$ ۴) $2^4 \times 3^2 \times 23$

□ تست ۳۱ اگر $a = 3^{\frac{1}{8}} - 1$ مقدار عبارت $(3^{\frac{1}{2}} + 1)(3^{\frac{1}{4}} + 1)(3^{\frac{1}{8}} + 1)$ بر حسب a کدام است؟
(موج آزمون)

$\frac{2}{a+1}$ (۴)

$\frac{1}{a+1}$ (۳)

$\frac{2}{a}$ (۲)

$\frac{1}{a}$ (۱)

☞ رادیکال‌ها:

حتما حفظ شود:

اگر $a^n = b$ باشد آن گاه عدد a را ریشه n ام عدد b می‌نامیم و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$a^n = b \Rightarrow a = \sqrt[n]{b}$$

☞ نکات مهم در رادیکال‌ها:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

(۱) تبدیل رادیکال به عدد توان‌دار:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

(۲) به توان رساندن رادیکال‌ها:

یعنی وقتی رادیکال‌ها به توان می‌رسند فقط عبارت زیر رادیکال به توان می‌رسد.

⇐ نتیجه: هرگاه رادیکال‌ها را به توان فرجه همان رادیکال برسانیم، رادیکال حذف می‌شود.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

(۳) فرجه و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توان در یک عدد ضرب نمود. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \times x]{a^{m \times x}}$

(۴) بردن ضریب به داخل رادیکال: ضریب به توان فرجه می‌رسد. $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \times b}$

(۵) ساده کردن رادیکال، هرگاه فرجه و توان عبارت زیر رادیکال یکسان باشد:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$$

(۶) رادیکال‌های پی‌درپی: فرجه‌ها در هم ضرب می‌شوند. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[n \times m \times p]{a}$

رادیکال‌های متشابه: دو رادیکال را متشابه می‌نامیم هرگاه فرجه و عبارت زیر رادیکال در هر

دو یکسان باشد. مانند: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[2]{2}$ -

۸ اعمال اصلی روی رادیکال‌ها:

(۱) جمع و تفریق: جمع و تفریق فقط برای رادیکال‌های متشابه تعریف می‌شود مانند:

$$* \sqrt[2]{2} + 4\sqrt[2]{2} = 5\sqrt[2]{2}$$

$$* 3\sqrt[2]{2} + 4\sqrt[2]{2} - 5\sqrt[2]{2} = 4\sqrt[2]{2} - 2\sqrt[2]{2}$$

* به همین صورت نوشته می‌شود $\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{2}$

(۲) ضرب و تقسیم رادیکال‌ها:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

الف) فرجه‌ها یکسان باشند:

ب) فرجه‌ها یکسان نباشند: زیر رادیکال ضرب یا تقسیم می‌شود.

در این حالت ابتدا کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها را محاسبه نموده و فرجه‌ها را یکسان

می‌کنیم سپس طبق رابطه‌ی بالا، رادیکال‌ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال 

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[4]{b^3} = \sqrt[12]{a^4 b^3}$$

□ تست ۳۲ حاصل $\sqrt[3]{108} + \sqrt[4]{500} - 9\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{32}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\sqrt[4]{4}$ (۳) $-\sqrt[4]{4}$ (۴) $2\sqrt[4]{4}$

(موج آزمون)

□ تست ۳۳ اگر $a^4 b^3 = 27$ مقدار $\sqrt{a^3 b} \times \sqrt[3]{b \sqrt{a}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt[3]{3}$ (۳) $\sqrt[6]{3}$ (۴) $3\sqrt[3]{3}$

□ تست ۳۴ حاصل $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} \times \sqrt{2-\sqrt{3}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

□ تست ۳۵ اگر $3\sqrt{18} + 4\sqrt{27} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ باشد، مقدار $a.b$ کدام است؟ (تمرین)

(میکرو گاج)

- ۶۰ (۱) ۷۲ (۲) ۹۰ (۳) ۱۰۸ (۴)

□ تست ۳۶ حاصل عبارت $\sqrt[6]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2\sqrt[4]{6}}$ کدام است؟ (تمرین)

(ریاضی خارج ۹۵)

- ۶ (۴) $2\sqrt[3]{9}$ (۳) $3\sqrt[6]{32}$ (۲) $6\sqrt[6]{6}$ (۱)

□ تست ۳۷ حاصل $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{20} (5 + 2\sqrt{6})^{10}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۱

□ تست ۳۸ اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{\frac{-1}{3}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۸)

- (۱) ۰/۲۵ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۷۵ (۴) ۱

□ تست ۳۹ اگر $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}$ باشد، حاصل $(1 + A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟ (تمرین)

(ریاضی خارج ۹۸)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ طرفین را به توان ۱۰ می‌رسانیم:

$$A^{10} = \left(\sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5} \right)^{10} \Rightarrow A^{10} = (9\sqrt{3})^2 (12)^{-15}$$

$$= 9^2 \times 3 \times (2^2 \times 3)^{-15} = 3^4 \times 3 \times 3^{-30} \times 3^{-15} = 2^{-30} \times 3^{-10}$$

$$A^{10} = 2^{-30} \times 3^{-10} \Rightarrow A = 2^{-3} \times 3^{-1} =$$

پس:

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می کنیم:

$$(1 + A^{-1})^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + 24)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

□ تست ۴۰ حاصل $\sqrt[5]{-4\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

□ تست ۴۱ حاصل $A = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} + \sqrt[6]{108}}{2\sqrt[3]{2}}$ کدام است؟ (تمرین)

(آزمون های گاج)

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt[3]{2}$ (۴) $\sqrt[3]{3}$

□ تست ۴۲) اگر $2^x = 15^y$ حاصل $\frac{3^y}{2^{x+1}}$ کدام است؟

۵^y (۴)

۵^{-y} (۳)

$\frac{1}{2}(5^{-y})$ (۲)

$\frac{1}{2}(5^y)$ (۱)

□ تست ۴۳) اگر $a = 5^{k+1}$ و $b = (25)^{rk}$ باشد آن گاه:

$b = a^{\Delta}$ (۴)

$a = b^{\Delta}$ (۳)

$b = 5a^r$ (۲)

$a = 5b$ (۱)

□ تست ۴۴) اگر $A = \sqrt{\frac{36}{3\sqrt{9}}} \times 3\sqrt[3]{3}$ باشد، عدد $\left(\frac{1}{2A}\right)^{-\frac{1}{2}}$ حداقل چند واحد از مربع یک عدد

(سنجش ۱۴۰۰)

طبیعی کمتر است؟

۳(۴)

۴(۳)

۵(۲)

۶(۱)

□ تست ۴۵ اگر $3^{2x+1} = 6a$ باشد، آن گاه حاصل $(27)^{\frac{x}{3}}$ چقدر است؟

- (۱) $2\sqrt{a}$ (۲) $\sqrt{2a}$ (۳) $4a^2$ (۴) $2a^2$

□ تست ۴۶ ریشه ششم مثبت $8^{2(x+1)}$ با ریشه دوم مثبت $(\frac{1}{2})^{2x}$ برابر است. مقدار x کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزشی ۹۹)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $2/3$ (۴) $-2/4$

□ تست ۴۷ حاصل کسر $\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$ اگر $a, b < 0$ باشند، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $-(a+b)$ (۴) $a+b$

□ تست ۴۸) حاصل کسر $\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{x^6}}$ وقتی $x < 0$ باشد، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{x}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{x}$ (۴) -۱

□ تست ۴۹) اگر $a < b < 0$ باشد حاصل $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} + \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ کدام است؟

- (۱) $-2b$ (۲) $2a$ (۳) $-2a$ (۴) $2b$

□ تست ۵۰) حاصل عبارت $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ برابر است با:

- (۱) ۵ (۲) $4\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) ۱

□ تست ۵۱) حاصل عبارت $\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴) $\sqrt{6}$

(تجربی ۱۴۰۱)

□ تست ۵۲) حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1 + \sqrt{7}}$ کدام است؟

۲ $\sqrt[4]{2}$ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt[4]{2}$ (۲)

۱ (۱)

□ تست ۵۳) حاصل عبارت $(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^{1/2} (\sqrt{7} + 2\sqrt{2})^{1/2}$ برابر است با:

$\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$ (۱)

$-\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ (۳)

□ تست ۵۴) حاصل عبارت $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt[4]{9} + 1)^{-1} \left(\sqrt{5 + \sqrt{22 + \sqrt{5}}} \times \sqrt{5 - \sqrt{22 + \sqrt{5}}} \right)$ کدام

(سنجش ۱۴۰۰)

است؟

۱) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

۲) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

۳) $\sqrt{3} - 1$

۴) $1 + \sqrt{3}$

۵۵ گویا کردن مخرج کسرها:

برای گویا کردن مخرج یک کسر، تبدیل آن به کسری است که مخرج آن اصم نباشد و برای گویا کردن معمولاً صورت و مخرج را در یک عامل مساوی ضرب می‌کنیم که مهم‌ترین آنها عبارتند از:

$$۱) \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

$$۲) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

$$۳) \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

$$۴) \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$$

$$۵) \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

□ تست ۵۵) عدد $\frac{2}{\sqrt[5]{8}}$ برابر کدام است؟

- ۱) $\sqrt[5]{2}$ ۲) $\sqrt[5]{4}$ ۳) $\sqrt[5]{2}$ ۴) $\sqrt[5]{4}$

□ تست ۵۶) حاصل عبارت $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

- ۱) $1+2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) ۱

راه حل - مخرج هر دو کسر (پرانترز دوم هم که توان منفی دارد، کسری است) را گویا

می کنیم:

$$\frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{13\sqrt{3} - 9 - 4 + \sqrt{3}}{16 - 3} + \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{13\sqrt{3} - 13}{13} + 2 + \sqrt{3}$$

$$= \frac{13(\sqrt{3} - 1)}{13} + 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}$$

□ تست ۵۷) برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$ باید صورت و مخرج کسر را در چه عددی ضرب کرد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

$\sqrt{2} - 1$ (۴)
 $\sqrt[3]{2} - 1$ (۳)
 $\sqrt{2} + 1$ (۲)
 $\sqrt[3]{2} + 1$ (۱)

□ تست ۵۸ حاصل عبارت $2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} - \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}}$ کدام است؟ (تمرین)

(تجربی داخل ۹۹ و مشابه تجربی خارج ۹۹)

$$\begin{array}{cccc} 1 + \sqrt{3} (۱) & -1 + \sqrt{2} (۲) & 1 - \sqrt{2} (۳) & \sqrt{2} - 2\sqrt{3} (۴) \end{array}$$

□ تست ۵۹ حاصل عبارت $(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(\sqrt[3]{2\sqrt{2}})$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۳)

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{3} (۱) & ۲ (۲) & 1 + \sqrt{3} (۳) & 2\sqrt{3} (۴) \end{array}$$

(آزمون های گاج)

□ تست ۶۰ حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-1} + \frac{1-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}$ کدام است؟

$2 + \sqrt{12}$ (۴)

$2 + \sqrt{8}$ (۳)

$2 + \sqrt{7}$ (۲)

$2 + \sqrt{6}$ (۱)

۷ نامساوی‌ها:

۱) $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

* $۲ \leq ۷ \Leftrightarrow ۲ + ۳ \leq ۷ + ۳$

۲) $a \leq b \Leftrightarrow a - c \leq b - c$

* $۲ \leq ۷ \Leftrightarrow ۲ - ۳ \leq ۷ - ۳$

۳) اگر $c > ۰, a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$

* $۲ \leq ۷, ۳ > ۰ \Leftrightarrow ۲ \times ۳ \leq ۷ \times ۳$

۴) اگر $c < ۰, a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$

* $۲ \leq ۷, -۳ < ۰ \Leftrightarrow ۲(-۳) \geq ۷(-۳)$

۵) اگر $a > ۰, b > ۰$

$a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

$۲ \leq ۳ \Rightarrow \frac{1}{۲} \geq \frac{1}{۳}$

$$6) \text{ اگر } a \leq b \text{ و } b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad * 2 \leq 3, 3 \leq 5 \Rightarrow 2 \leq 5$$

$$7) \text{ اگر } a \leq b, c \leq d \Leftrightarrow a+c \leq b+d$$

$$* 2 \leq 3 \quad 5 \leq 7 \Rightarrow 2+5 \leq 3+7$$

$$8) a \leq b \text{ و } n \text{ عددی فرد و طبیعی} \Rightarrow a^n \leq b^n$$

$$* 2 \leq 3 \Leftrightarrow 2^5 \leq 3^5$$

$$9) a \leq b \text{ و } a, b > 0 \text{ عددی زوج و طبیعی} \Rightarrow a^n \leq b^n$$

$$* 3 \leq 4 \Rightarrow 3^2 \leq 4^2$$

$$10) a \leq b, a, b < 0 \text{ عددی زوج و طبیعی باشد} \Rightarrow a^n \geq b^n$$

$$-4 \leq -3 \Rightarrow (-4)^2 \geq (-3)^2 \Rightarrow 16 \geq 9$$

تذکره (۱)

$$\text{اگر } a > 0 \text{ آن گاه } a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$\text{اگر } a < 0 \text{ آن گاه } a + \frac{1}{a} \leq -2$$

تذکره (۲)

$$\text{اگر } a > 1 \text{ آن گاه } a < a^2 < a^3 \dots < a^n$$

$$\text{اگر } 0 < a < 1 \text{ آن گاه } a > a^2 > a^3 > \dots > a^n$$

تذکر (۳)

اگر $a > 1$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 3$ آن گاه $\sqrt[n]{a} > \sqrt{a}$.
اگر $0 < a < 1$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 3$ آن گاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt{a}$.

تست ۶۱ اگر $a > b > 0$ باشد کدام نادرست است؟

- (۱) $a^2 < b^2$ (۲) $a^2 > b^2$ (۳) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (۴) $a^2 < b^2$

تست ۶۲ اگر $a > b > 0$ کدام همواره درست است؟

- (۱) $a^2 > b^2$ (۲) $\frac{1}{a-b} > 0$ (۳) $a^2 < b^2$ (۴) $a^2 - b^2 < 0$

□ تست ۶۳ اگر $0 < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a^3}$ باشد، آن گاه کدام گزینه درست نیست؟ (کانون فرهنگی آموزشی ۹۸)

(۱) $\sqrt[6]{a} < \sqrt[5]{a}$ (۲) $a^3 > a^4$ (۳) $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$ (۴) $\sqrt[6]{a^5} < \sqrt[4]{a}$

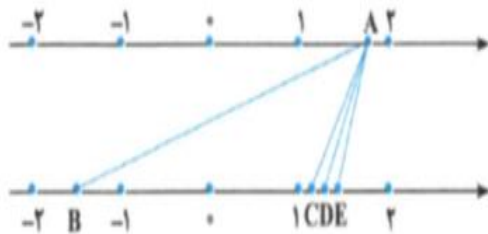
□ تست ۶۴ اگر $a > b > 0$ باشد کدام همواره درست است؟ (تمرین)

(۱) $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[3]{b^2}$ (۲) $a^2 > b^2$ (۳) $\frac{a}{b} < 1$ (۴) $ab > 1$

□ تست ۶۵ مقدار عبارت $x(x^2 - 4x + 1) + 2$ به ازای $x = 2 - \sqrt{3}$ چند است؟ (IQ گاج)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

□ تست ۶۶ در شکل زیر، نقطه A از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. کدام عبارت صحیح می باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) B ریشه چهارم، C ریشه سوم، D ریشه چهارم و E ریشه پنجم

۲) B ریشه چهارم، C ریشه پنجم، D ریشه چهارم و E ریشه سوم

۳) B ریشه سوم، C ریشه سوم، D ریشه چهارم و E ریشه پنجم

۴) B ریشه سوم، C ریشه پنجم، D ریشه چهارم و E ریشه سوم

□ تست ۶۷ مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن گاه حاصل ضرب پول های باقیمانده آن ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۹۱(۴)

۸۵(۳)

۱۵(۲)

۹(۱)

