

فصل دوم

تعیین علامت، حل معادلات و نامعادلات

تعیین علامت دو جمله‌ای درجه‌ی اول $P(x) = ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	$\circ$	موافق علامت a

تذکره (۱) برای حل یک نامعادله‌ی درجه اول، اعداد را در یک طرف و مجهول‌ها را در طرف دیگر نامساوی قرار می‌دهیم و سپس حدود تغییرات را با عملیات جبری می‌یابیم.

مثال (۱)

$$3x - 18 \leq 0$$

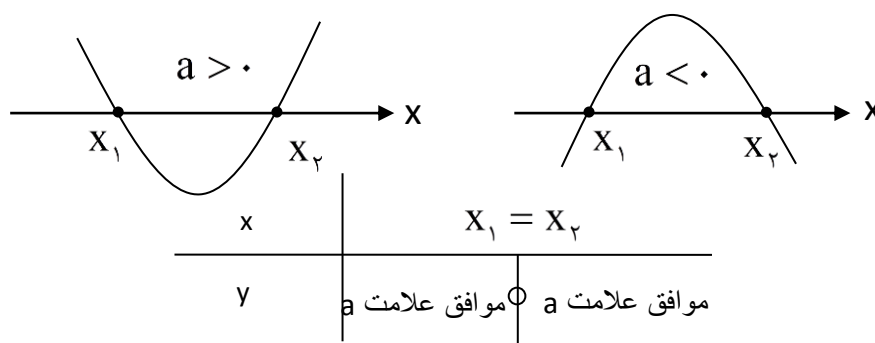
تذکره (۲) برای حل دستگاه نامعادلات درجه‌ی اول، ابتدا هریک از نامعادلات را جداگانه حل کرده و سپس بین مجموعه جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم.

تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$

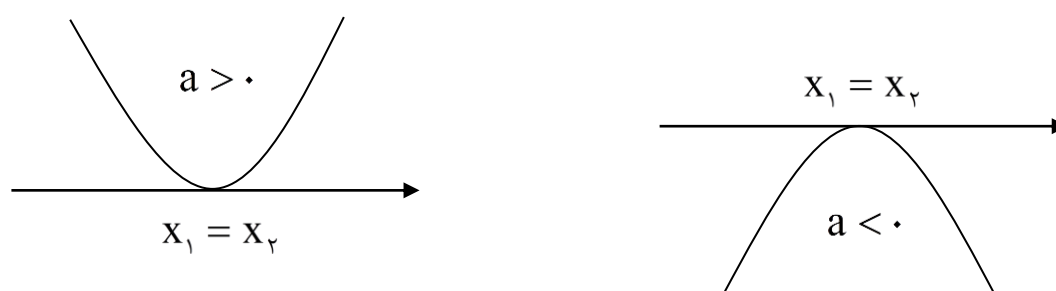
علامت یک تابع درجه دوم با ضابطه‌ی $y = ax^2 + bx + c$ در حالت کلی به Δ آن و ضریب x^2 یعنی a ارتباط دارد. ۳ حالت کلی داریم:

x	X_1	X_2
y	موافق علامت a	مخالف علامت a

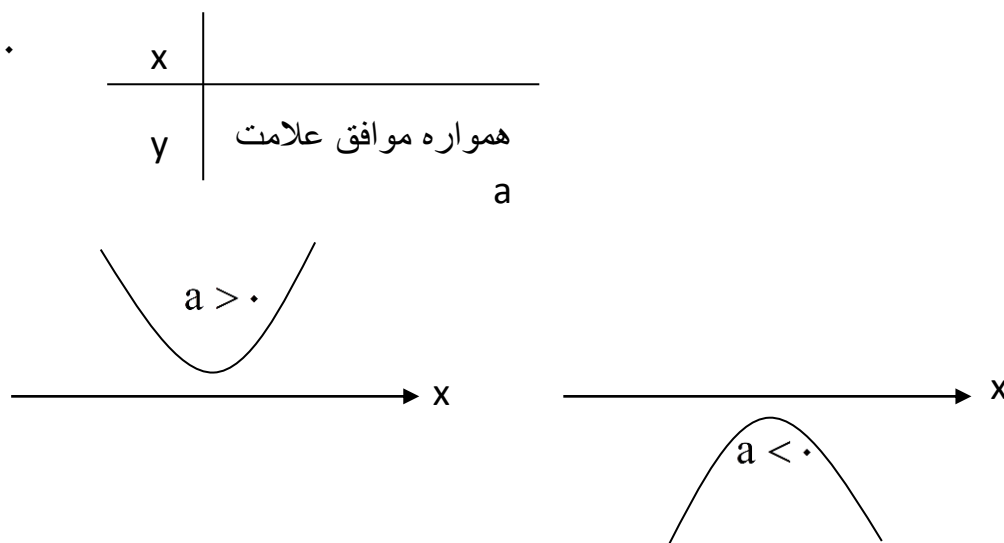
۱) $\Delta > 0$



۲) $\Delta = 0$



۳) $\Delta < 0$



نتیجه: در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$

(الف) اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$ تابع همواره بالای محور x ها است.

(ب) اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$ تابع همواره پایین محور x ها است.

☒ **تذکره:** در تعیین علامت چند جمله‌ای $(n \in \mathbb{N})P(x) = (ax + b)^n$

(الف) اگر n زوج باشد $P(x) \geq 0$ (تغییر علامت به ازای ریشه‌های مضاعف یا مکرر مرتبه زوج نداریم).

(ب) اگر n فرد باشد، علامت این عبارت با $P(x) = (ax + b)$ یکسان است به عبارت دیگر، توان فرد در تعیین علامت بی‌اثر است.

📖 **مثال ۲)** در عبارت $P(x) = (x - 1)^4$ در $x = 1$ تغییر علامت نداریم و $P(x) \geq 0$ و در عبارت $P(x) = (x - 1)^3$ در $x = 1$ تغییر علامت داریم که علامت آن با علامت $(x - 1)$ یکسان است.

۳ نامعادلات چند جمله‌ای:

برای حل نامعادلات درجه دوم و بالاتر از آن، عبارت‌ها را به یک طرف منتقل کرده ساده کرده و سپس با تعیین علامت، مجموعه‌ی جواب را می‌یابیم.

📖 مثال ۳) نامعادله $2x^2 - x - 1 \leq 0$ را حل کنید:

📌 تست ۴) جدول تعیین علامت یک تابع خطی به صورت مقابل است. این نمودار از کدام نقطه زیر قطعاً نمی‌گذرد؟ (IQ گاج)

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f(x)	-	•	+

(۲) -۲ و ۱/۵

(۱) ۲ و ۴

(۴) ۱ و ۳

(۳) ۳ و ۱

📌 تست ۵) اگر جدول تعیین علامت عبارت $A = mx^2 + m^2x + 2x + 2m$ به صورت

x	$-\infty$	n	$+\infty$
A	-	•	-

باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟ (خیلی سبز)

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) -۱

(۲) صفر

(۱) $2\sqrt{2}$

📌 تذکر) برای حل نامعادلات می‌توانیم از نامساوی‌های زیر استفاده کنیم:

۱) $x^n \leq a \xleftrightarrow{a>0} -a \leq x \leq a$

۲) $x^n \geq a \xleftrightarrow{a>0} x \geq a \text{ یا } x \leq -a$

۳) $x^{n+1} \leq a \longleftrightarrow x \leq a$

۴) $x^{n+1} \geq a \xleftrightarrow{x \geq a} x \geq a$

□ تست ۶) یک توپ از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد. به هوا پرتاب می شود. اگر ارتفاع این توپ از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود. به ازای چند t صحیح، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟ (کتاب درسی)

۴(۴

۳(۳

۲(۲

۱(۱

□ تست ۷) در بازه $[x, +\infty)$ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ بالاتر از خط به

معادله $y = 3(x - 1)$ قرار نمی گیرد. کمترین مقدار $f(x)$ کدام است؟

۴(۴

۳(۳

۲(۲

۱(۱

□ تست ۸) کوچک ترین عدد طبیعی k که به ازای آن عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت می شود، کدام است؟ (مهر و ماه)

۵(۴

۴(۳

۳(۲

۲(۱

□ تست ۹) جواب نامعادله $1 \leq 3x - 2 \leq -1$ کدام است؟ (تمرین)

$$(1) \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad (2) -1 \leq x \leq 1 \quad (3) -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \quad (4) -2 \leq x \leq 1$$

□ تست ۱۰) مجموعه جواب نامعادله $2x - 4 < x^2 - 3x \leq 4$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۹)

$$(1) [-1, 4] \quad (2) [-1, 4) \quad (3) [-1, 1) \cup \{4\} \quad (4) [-1, 1)$$

پاسخ: گزینه ۴

باید دو نامعادله $2x - 4 < x^2 - 3x$ و $x^2 - 3x \leq 4$ را جداگانه حل کنیم و جواب های آن ها را اشتراک بگیریم.

$$x^2 - 3x \leq 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) \leq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & -1 & 4 \\ \hline x^2 - 3x - 4 & + & - & + \end{array} \Rightarrow -1 \leq x \leq 4 \quad (I)$$

$$2x - 4 < x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 1) > 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & 1 & 4 \\ \hline x^2 - 5x + 4 & + & - & + \end{array} \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x > 4 \quad (II)$$

اشتراک محدوده های (I) و (II) به صورت $-1 \leq x < 1$ می باشد.

□ تست ۱۱) مجموعه ی جواب های نامعادله ی $x - 2 \leq 5x + 4 < 3x - 6$ به کدام

(مهر و ماه)

صورت است؟

۱) $\left(\frac{3}{2} \text{ و } 5\right)$ ۲) $\left(\frac{-3}{2} \text{ و } 5\right)$ ۳) $\left(-5 \text{ و } \frac{-3}{2}\right)$ ۴) $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۴: بهتر است نامعادله هایی به شکل $x - 2 \leq 5x + 4 < 3x - 6$ را (که شامل دو نامعادله است) به صورت های $x - 2 \leq 5x + 4$ و $5x + 4 < 3x - 6$ در نظر بگیریم و هر کدام را جداگانه حل کنیم. دست آخر اشتراک جواب ها را به عنوان مجموعه ی جواب های نامعادله معرفی کنیم: (مهر و ماه)

$$x - 2 \leq 5x + 4 \xrightarrow{x \text{ ها به راست}} -2 - 4 \leq 5x - x \Rightarrow -6 \leq 4x$$

$$\xrightarrow{+4} \frac{-6}{4} \leq \frac{4x}{4} \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq x \Rightarrow x \geq \frac{-3}{2} \quad (1)$$

$$5x + 4 < 3x - 6 \xrightarrow{x \text{ ها به چپ}} 5x - 3x < -6 - 4$$

$$\Rightarrow 2x < -10 \xrightarrow{+2} \frac{2x}{2} < \frac{-10}{2} \Rightarrow x < -5 \quad (2)$$

در نهایت

$$\longrightarrow \text{مجموعه ی جواب ها} = 1 \cap 2 = \emptyset$$

□ تست ۱۲) به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار

$$f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$$

بالای محور x هاست؟

- (۱) $a < -1$ (۲) $a > 1$ (۳) $a > 2$ (۴) $1 < a < 2$

□ تست ۱۳) منحنی به معادله $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه

قطع می کند. مجموعه ی مقادیر a به کدام صورت است؟

- (۱) $-4 < a < 0$ (۲) $0 < a < 2$ (۳) $0 < a < 4$ (۴) $a > 4$

□ تست ۱۴) مقادیر تابع با ضابطه ی $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ در بازه ی (a, b) بزرگتر از $\frac{7}{4}$

(تمرین)

است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴) ۶

□ تست ۱۵) نمودار تابع با ضابطه‌ی $x > -1$ و $f(x) = x^2 - 4x^2 - x + 4$ در بازه‌ی (a, b) زیر

محور x هاست. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

□ تست ۱۶) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه‌ی (a, b) پایین‌تر از خط به

معادله‌ی $y = 2$ است بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ∞

معادلات شامل عبارات گویا:

برای حل یک معادله‌ی گویا، طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها، ضرب می‌کنیم و عبارت جبری به دست آمده را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده نباید مخرج کسر را صفر کنند.

📖 مثال ۱۷) معادله‌ی $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$ را حل کنید.

□ تست ۱۸) اگر یکی از جواب های معادله $\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-2} = 1$ برابر ۶ باشد، جواب دیگر کدام است؟
(موج آزمون)

- ۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

□ تست ۱۹) تعداد جواب های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

- ۰(۱) ۱(۲) ۲(۳) ۳(۴)

□ تست ۲۰) به ازای چه مقادیری از a معادله $\frac{a}{x-2} - \frac{7+x}{x^2-2x} = \frac{x+3}{x}$ جواب حقیقی ندارد؟

(مدارس برتر ۱۴۰۰)

- ۱(۰ و ۴) ۲(۰ و ۲) ۳(۲ و ۴) ۴(۱ و -۱)

□ تست ۲۱) حاصل عبارت $A = \left(1 - \frac{2}{x^4 + x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2}$ برابر کدام است؟ (مبتکران ۹۹)

- (۱) $\frac{1}{x^2}$ (۲) ۱ (۳) $1 - \frac{1}{x^2}$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

با مخرج مشترک گیری درون هر پرانتز داریم:

$$A = \left(\frac{x^4 + x^2 - 2}{x^4 + x^2}\right) \left(\frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2} = \left(\frac{(x^2 + 2)(x^2 - 1)}{x^2(x^2 + 1)}\right) \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 1$$

□ تست ۲۲) معادله $x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

(مدارس برتر ۱۲ شهریور ۱۴۰۰)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

□ تست ۲۳) یازده کیلو گرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلو گرم رنگ از همان نوع با

غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلو گرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد

(ریاضی خارج ۹۲)

می رسد؟

- (۱) $\frac{۰}{۴}$ (۲) $\frac{۰}{۵}$ (۳) $\frac{۰}{۶}$ (۴) $\frac{۰}{۸}$

□ تست ۲۴) بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو با هم کار کنند. در ۲۰ ساعت این کار انجام می شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می دهد؟
(ریاضی داخل ۹۸)

۳۶(۴)

۳۵(۳)

۳۳(۲)

۳۲(۱)

□ تست ۲۵) پرنده ای فاصله یک کیلو متری را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلو متر در ساعت و مدت زمان رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلو متر بر ساعت است؟
(تجربی خارج ۹۸)

۱۵(۴)

۱۳/۵(۳)

۱۲/۵(۲)

۱۲(۱)

□ تست ۲۶) سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر بر دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر بر دقیقه است؟
(تجربی داخل ۹۸)

۲۵(۴)

۲۰(۳)

۱۵(۲)

۱۲(۱)

□ تست ۲۷) رضا درون قایقی در نقطه A قرار دارد که فاصله آن از نزدیک ترین نقطه ساحل یعنی H معادل ۳ کیلو متر است او می خواهد به نقطه C که در ۸ کیلومتری نقطه H قرار دارد برسد. اگر سرعت قایق 2 km/h سرعت پیاده روی رضا در ساحل 4 km/h و کل مدت زمان حرکت $3/5$ ساعت باشد او چه مسافتی را طی می کند؟
(میکرو گاج)

۷/۵(۱)

۸(۲)

۹(۳)

۹/۵(۴)

□ تست ۲۸) جسمی به جرم ۲۰۰ گرم از جنس آلیاژ طلا و نقره است. اگر خلوص طلای آن ۴۵٪ باشد وبخواهیم درصد خلوص طلا را به ۳۰٪ برسانیم، چند گرم نقره باید به آن اضافه کنیم؟
(مدارس برتر ۱۲ شهریور ۱۴۰۰)
(تمرین)

۱۰۰(۴)

۱۶۷(۳)

۱۵۰(۲)

۱۲۰(۱)

📖 مثال ۲۹) اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند می توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض آن که سرعت یکی از آن ها دو برابر دیگری باشد. هر یک از آن ها به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟ (تمرین کتاب درسی)

📐 تست ۳۰) یک مکانیک همراه شاگردش قطعه ای از یک خودرو را در مدت ۷۲ دقیقه تعویض می کنند. اگر شاگرد او بخواهد به تنهایی قطعه را تعویض کند یک ساعت بیش تر از زمانی طول می کشد که استادش بخواهد آن را به تنهایی تعویض کند شاگرد قطعه را به تنهایی در چند ساعت تعویض می کند؟ (قلم چی تجربی، ۱۸ تیر ۱۴۰۰)

۱/۵(۱)

۲(۲)

۳(۳)

۲/۵(۴)

🔗 نامعادلات گویا:

برای حل یک نامعادله ی گویا، همانند نامعادلات جبری حل می کنیم و عبارت های صورت و مخرج را تعیین علامت نموده و با استفاده از جدول، مجموعه جواب را می یابیم.
توجه: ریشه های مخرج را از مجموعه جواب کسر می کنیم.

📖 مثال ۳۱) نامعادله $\frac{2-3x}{x(x-1)} > 0$ را حل کنید.

□ تست ۳۲) مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{2x-1}{x+1} < -1$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

$$(1) (0, +\infty) \quad (2) (4, +\infty) \quad (3) \mathbb{R} - [-4, 0] \quad (4) \mathbb{R} - [-4, -1]$$

راه حل: ابتدا طرفین نامعادله داده شده، یک واحد کم می کنیم و سپس به کمک خواص قدرمطلق، نامعادله را به شکل قدرمطلق می نویسیم. و حل می کنیم.

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3 \xrightarrow{-1} -2 < \frac{2x-1}{x+1} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{2x-1-x-1}{x+1} < 2$$

$$\xrightarrow{\text{خواص قدر مطلق}} \left| \frac{x-2}{x+1} \right| < 2 \Rightarrow \frac{|x-2|}{|x+1|} < 2 \Rightarrow |x-2| < 2|x+1| \xrightarrow{\text{توان 2}}$$

$$(x-2)^2 < 4(x+1)^2 \Rightarrow (x-2)^2 < (2x+2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 - (2x+2)^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} (x-2-2x-2)(x-2+2x+2) < 0 \Rightarrow (-x-4)(3x) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -4 \cup x > 0$$

در نهایت جواب نامعادله را می توانیم به صورت $\mathbb{R} - [-4, 0]$ نیز نشان دهیم.

□ تست ۳۳) مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$ به کدام صورت است؟ (تمرین)

(تجربی ۹۸)

$$R - [-6, 4] \quad (1) \quad R - [-4, 6] \quad (2) \quad x > 4 \quad (3) \quad x < -6 \quad (4)$$

□ تست ۳۴) مجموعه جواب نامعادله $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$ به کدام صورت است؟ (تمرین)

(تجربی ۹۶)

$$x < \frac{1}{2} \quad (1) \quad x < 3 \quad (2) \quad -\frac{1}{2} < x < 3 \quad (3) \quad \frac{1}{2} < x < 3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

برای حل نامعادله بالا باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم. و در نهایت بین آن ها اشتراک بگیریم:

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x-3} < 3 & (1) \\ \frac{3x+1}{x-3} > -1 & (2) \end{cases} \Rightarrow \text{جواب نهایی} = (1) \cap (2)$$

ابتدا نامعادله (۱) را حل می کنیم:

$$\frac{3x+1}{x-3} < 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{10}{x-3} < 0$$

صورت کسر مثبت است، پس برای آنکه $\frac{10}{x-3} < 0$ باشد، حتماً باید مخرج منفی باشد، یعنی می توان نوشت:

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

حال نامعادله (۲) را حل می کنیم:

$$\frac{3x+1}{x-3} > -1 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3x+1+x-3}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{4x-2}{x-3} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$4x-2$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$\frac{4x-2}{x-3}$	+	-	+	+

$$\Rightarrow x < \frac{1}{2} \cap x > 3$$

در نهایت از اشتراک دو محدوده $(x < 3)$ با $(x < \frac{1}{2} \cup x > 3)$ جواب مسئله به صورت $x < \frac{1}{2}$ بدست می آید.

□ تست ۳۵ مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $-2 < x < 3$

□ تست ۳۶ مجموعه جواب نامعادله $\frac{-x^2+3x-2}{x^3-1} > 1$ به صورت (a,b) است. مقدار $\frac{a+b}{2}$ کدام است؟
(سنجش تجربی ۱۴۰۰)

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) -1

(۳) $\frac{1}{10}$

(۴) $\frac{1}{20}$

□ تست ۳۷) مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ به صورت کدام بازه است؟

(تجربی خارج ۹۸)

(۱) $(-4, 1) \cup (1, 2)$ (۲) $(2, 4)$ (۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$ (۴) $(-1, 2)$

راه حل: تمامی جملات را به سمت چپ می بریم و سپس مخرج مشترک می گیریم و سراغ تعیین علامت می رویم. پس می توان نوشت:

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{7x-8-x(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \text{ ساده} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ مرتبه دو} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \text{ ساده} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)}$		+	-	-	+

$\Rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$

□ تست ۳۸) مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} > 2x$ کدام مجموعه است؟ (تمرین)

(۱) $x < -1$ (۲) $x > -1$ (۳) $-1 < x < 1$ (۴) $-2 < x < -1$

□ تست ۳۹ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{x+1}{2x-1} < 1$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

- (۱) $(0/6 \text{ و } 1/5)$ (۲) $(0/8 \text{ و } 1/2)$ (۳) $(1 \text{ و } 2)$ (۴) $(0/8 \text{ و } 2)$

□ تست ۴۰ مجموعه جواب نامعادله ی $3 < \frac{2x-1}{x+1} < -1$ ، کدام است؟ (تمرین)

(تجربی خارج ۹۹)

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(4, +\infty)$ (۳) $\mathbb{R} - [-4, 0]$ (۴) $\mathbb{R} - [-4, -1]$

□ تست ۴۱) اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد، آن گاه جواب نامعادله $\frac{x}{f(x)} < 0$ کدام است؟
(آزمون های گاج)

۱) $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$

۲) $(-1, 3)$

۳) $(-1, 0)$

۴) $(0, +\infty)$

□ تست ۴۲) اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، جواب نامعادله $\frac{f(x)}{x^2-2x+1} > 0$ کدام است؟ (گاج ۹۹)
(تمرین)

۱) $x \neq 1$

۲) $x < 1$

۳) $x > 1$

۴) $x > 0$

پاسخ: گزینه ۳

تابع $f(x)$ یک ریشه ساده $x=1$ دارد، در نتیجه ریشه های صورت و مخرج $g(x)$ در $x=1$ مشترک خواهد بود. اما دقت کنید که $x=1$ ریشه مضاعف مخرج و ریشه ساده صورت است. بنابراین $x=1$ مانند ریشه ساده عمل می کند.

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$	$+$

$$g(x) > 0 \Rightarrow x > 1$$

□ تست ۴۳) در کدام فاصله نامساوی $\frac{x^2-1}{x-1} \geq 0$ برقرار است؟

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty)$

□ تست ۴۴) نامعادله $\frac{x-1}{2} < 3x+1 < \frac{3-x}{3}$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟ (منتشران)

- (۱) $(-\frac{3}{5}, 0)$ (۲) $(-\frac{5}{3}, 0)$ (۳) $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ (۴) $(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$

پاسخ: گزینه ۱:

نامعادله های به شکل $A < B < C$ را به دو نامعادله $A < B$ ، $B < C$ تقسیم می کنیم. هر دو را حل می کنیم و بین جواب هایشان اشتراک می گیریم.

$$\frac{x-1}{2} < 3x+1 < \frac{3-x}{3} \Rightarrow \begin{cases} (1) \frac{x-1}{2} < 3x+1 \Rightarrow x-1 < 6x+2 \\ \Rightarrow x > -\frac{3}{5} \\ (2) 3x+1 < \frac{3-x}{3} \Rightarrow 9x+3 < 3-x \\ \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

اشتراک می گیریم.

$$(1) \cap (2) = \left(x > -\frac{3}{5}\right) \cap (x < 0) = \left(-\frac{3}{5}, 0\right)$$

□ تست ۴۵) چند عدد طبیعی در بازه جواب نامعادله $\frac{x^2+2x}{x-1} > 4x$ صدق می کند؟

(مدارس برتر ۱۴۰۰)

۳(۴

۲(۳

۱(۲

۱(صفر)

□ تست ۴۶) در بازه (a, b) نمودار تابع $y = (x - 1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است.

(تجربی خارج ۹۹)

بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴

۲(۳

$\frac{3}{2}$ (۲

۱(۱

□ تست ۴۷) به ازای چه مقدار x معادله $\frac{x}{3t} = \frac{t-5}{t^2-4t}$ دارای مجموعه جواب $\{5\}$ است؟

(تمرین)

۵ (۴

-۱ (۳

۱ (۲

۰ (۱

□ تست ۴۸) جواب x از معادله $\frac{2}{2x} = \frac{x+2}{x^2-3x}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱۳ (۳) -۱ (۴) ۵

□ مستطیل طلایی :

□ تست ۴۹) مساحت یک مستطیل طلایی $2(1 + \sqrt{5})$ است. محیط مستطیل چقدر است؟
(آزمون های گاج)

- (۱) $6 - \sqrt{20}$ (۲) $6 + \sqrt{20}$ (۳) $3 + \sqrt{5}$ (۴) $3 + \sqrt{20}$

□ تست ۵۰) اگر مجموع دو عدد برابر با $\sqrt{5}$ و نسبت آن ها برابر با نسبت طلایی باشد، عدد بزرگ تر کدام است؟ (تمرین)

(میکرو گاج)

- (۱) $5 - \sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5} - 1$ (۳) $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

□ تست ۵۱) مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x^2-3x}{x^3-1} \geq 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

(کانون فرهنگی آموزشی ۹۹)

۴) بی شمار

۳) ۳

۲) ۱

۱) صفر

معادلات گنگ:

برای حل معادلات اصم، با به توان رساندن طرفین معادله، رادیکال‌ها را از بین می‌بریم سپس معادله به دست آمده را حل کرده، جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه باشند.

📖 مثال ۵۲) معادله $3\sqrt{2a-1} + 4 = 7$ را حل کنید:

📖 مثال ۵۳) معادله $3 = 5 - \sqrt{x} + 6$ را حل کنید:

□ تست ۵۴) عددی که جذرش با چهار برابر معکوس آن عدد برابر باشد، کدام است؟

(موج آزمون)

$\sqrt{32}(۴)$

$\sqrt[3]{16}(۳)$

$\sqrt[3]{4}(۲)$

$\sqrt{2}(۱)$

✕ تذکر) هرگاه در معادلات اصم، رادیکال‌ها را به توان عددهای زوج برسانیم امکان دارد ریشه خارجی در معادله وارد شود، بنابراین در حل معادلات اصم، حتماً ریشه‌ها را در معادله چک کنید.

□ تست ۵۵) معادله $x + \sqrt{x} = 6$ چند ریشه دارد؟

$۳(۴)$

$۲(۳)$

$۱(۲)$

$۱(۱) \text{ ریشه ندارد}$

□ تست ۵۶) معادله $x^2 - 2 = \sqrt{x + 3}$ چند جواب دارد؟ (حلی سنج ۱۲ شهریور ۱۴۰۰)

$۴(صفر)$

$۳(۳)$

$۲(۲)$

$۱(۱)$

□ تست ۵۷) معادله ی $2\sqrt{1-4x^2} = 2x - 2$ چند ریشه دارد؟ (تمرین)

- (۱) ریشه ندارد (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

□ تست ۵۸) معادله $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2-x-2} = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ریشه ندارد (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

□ تست ۵۹) تنها ریشه معادله ی $x - \sqrt{x+1} = 1$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۹)

- (۱) -۱ (۲) ۸ (۳) ۳ (۴) صفر

پاسخ گزینه ۳

نکته: برای حل یک معادله رادیکالی می توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب های حاصل در معادله اولیه صدق می کنند.

$$x - \sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = x - 1 \Rightarrow x + 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \xrightarrow{\text{در معادله}} 0 - \sqrt{1} = 1 \Rightarrow -1 = 1 \\ x = 3 \xrightarrow{\text{در معادله}} 3 - \sqrt{4} = 1 \Rightarrow 3 - 2 = 1 \text{ درست} \end{cases}$$

با جای گذاری $x=0$ در معادله می فهمیم که این جواب غیر قابل قبول است ، تنها جواب قابل قبول معادله $x=3$ است.

□ تست ۶۰ معادله $(x^2 - x)(\sqrt{x} - 2)$ چند ریشه دارد؟ (تمرین)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ریشه ندارد

□ تست ۶۱ فرض کنید x_1 و x_2 جواب های معادله $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$

باشند، مقدار $x_1 + x_2$ ، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

□ تست ۶۲) اختلاف ریشه های معادله $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$ چقدر است؟

(مدارس برتر ۱۴۰۰)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

□ تست ۶۳) معادله $2x + \sqrt{2x-3} = 3$ چند ریشه دارد؟

۴ بی شمار

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ ریشه ندارد

□ تست ۶۴) معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ صفر

□ تست ۶۵) معادله $\sqrt{x-2} + \frac{4}{\sqrt{x-2}+1} = 3$ چند جواب دارد؟ (تمرین)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

سه (۴)

دو (۳)

یک (۲)

هیچ (۱)

□ تست ۶۶) تعداد جواب های معادله $\sqrt{x^2-1} + \sqrt[4]{x^3-1} + \sqrt{x^4-x} = 0$ کدام است؟
(مدارس برتر ۱۴۰۰)

سه (۴)

دو (۳)

یک (۲)

صفر (۱)

□ تست ۶۷) اگر $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۸)

۴/۵ (۴)

۳/۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۱/۵ (۱)

□ تست ۶۸ اگر α ریشه معادله $1 + \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+4}$ باشد مقدار $\sqrt{\frac{\alpha}{3}} + 4$ چه عددی

(مدارس برتر ۱۴۰۰)

است؟

$$2\sqrt{2}(۴)$$

$$۳(۳)$$

$$۲(۲)$$

$$\frac{5}{2}(۱)$$

□ تست ۶۹ حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادله $a^2 + 4a + 3 = \sqrt{a^2 + 4a + 5}$ کدام

(ریاضی داخل ۹۴)

است؟

$$۴(۴)$$

$$۲(۳)$$

$$۱(۲)$$

$$-۲(۱)$$

□ تست ۷۰ فاصله نقطه تلاقی منحنی های $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}, 2y = x^2$ بامبدأ

(تجربی ۱۴۰۰)

مختصات ، کدام است؟

$$\sqrt{15}(۴)$$

$$2\sqrt{3}(۳)$$

$$\sqrt{6}(۲)$$

$$\sqrt{3}(۱)$$

□ تست ۷۱) فاصله نقطه A روی خط $Y=2X$ با طول مثبت تا مبدأ مختصات برابر $2\sqrt{5}$ و

فاصله آن تا نقطه $B(m, 0)$ برابر $\sqrt{17}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام

است؟ (تمرین) (گاج ۱۴۰۰)

۲(۴)

۱(۳)

۳(۲)

۴(۱)

بخش نامعادلات اصم:

برای حل این نامعادلات نیز حوزه تغییرات x را مشخص نموده و به کمک تعیین علامت محدوده x را می‌یابیم.

□ تست ۷۲) مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{3\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}+5} < 1$ در کدام فاصله است؟

۴(۴) $x > 4$ ۳(۳) $0 \leq x < 4$ ۲(۲) $x < 4$ ۱(۱) $x \geq 0$

□ تست ۷۳) حدود x از نامعادله $(x^2 - 2)(2 + \sqrt{x}) \leq 2x + x\sqrt{x}$ کدام است؟ (تمرین)

$$(1) -1 \leq x \leq 2 \quad (2) 0 \leq x \leq 2 \quad (3) x \geq 0 \quad (4) x \geq 2$$