

فصل سوم

تابع و معادله درجه دوم

معادله‌ی درجه دوم:

فرم کلی معادله‌ی درجه دوم به صورت $(a \neq 0)ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (\text{مبین دلتای}) \quad \text{معادله نامیده می‌شود و} \quad x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ریشه‌های معادله هستند. اگر $\Delta \geq 0$ معادله دو ریشه حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تعداد و علامت ریشه‌های معادله:

در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با توجه به شرایط Δ و $-\frac{a}{b}$ (مجموع ریشه‌ها) و $\frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها) می‌توان در مورد تعداد و علامت ریشه‌ها نظر داد.

$$\begin{aligned} \Delta > 0 \rightarrow \begin{cases} \text{معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \quad \text{دو ریشه مثبت} \\ -\frac{b}{a} < 0 \quad \text{دو ریشه منفی} \end{cases} \\ \Delta < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{معادله دو ریشه مختلط مزدوج دارد} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \quad \text{ریشه بزرگتر مثبت} \\ -\frac{b}{a} < 0 \quad \text{ریشه کوچکتر مثبت} \end{cases} \end{aligned}$$

$$2) \Delta = 0 \rightarrow$$

(معادله به یک مربع کامل تبدیل می‌شود). $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ معادله ریشه مضاعف دارد

$$3) \Delta < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$

📖 مثال ۱) بدون حل معادله در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 1 = 0$ نظر

دهید؟

☞ نکته) شرط آن که معادله درجه دوم دارای یک ریشه صفر باشد آن است که $b \neq 0$ و $c = 0$

☞ نکته) شرط آن که معادله درجه دوم دارای دو ریشه قرینه باشد آن است که $\frac{c}{a} < 0$ و $b = 0$

☞ نکته) شرط آن که معادله درجه دوم دارای ریشه مضاعف صفر باشد آن است که $b = c = 0$ باشد.

□ تست ۲) مقدار m را چنان بیابید که معادله درجه‌ی دوم $(m+1)x^2 + (m^2 + m - 2)x + 2 = 0$

دارای دو ریشه قرینه باشد؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

□ تست ۳) به ازای کدام مقادیر m معادله‌ی درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دارای

دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $m < -6$ ۲) $m > 3$ ۳) $0 < m < 3$ ۴) $3 < m < 6$

📌 نکته) اگر در معادله درجه دوم ضریب x یعنی (b) زوج باشد می توان از دستور Δ' معادله را حل نمود:

$$b' = \frac{b}{2} \quad \Delta' = b'^2 - ac \quad x_1, x_2 = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

📌 نکته) اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه ی متمایز x_1 و x_2 باشد آن گاه می توان عبارت $ax^2 + bx + c$ را به صورت زیر تجزیه کرد:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

📌 تست ۴) اگر معادله $x^2 - mx + \left(m - \frac{3}{4}\right) = 0$ دارای دو ریشه حقیقی باشد حدود m کدام است؟

۱) $1 < m < 3$ ۲) $m < 3$ ۳) $m > 3$ یا $m < 1$ ۴) $m > 1$

□ تست ۵) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله ی درجه دوم $(2m - 1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$

دارای دو ریشه ی حقیقی است؟ (ریاضی ۹۸) (تمرین)

$$-2 < m < 3/5(2) \quad -2 < m < 2/5(1)$$

$$-1 < m < 2/5(4) \quad -1 < m < 3/5(3)$$

□ تست ۶) کدام یک از معادلات زیر دارای دو ریشه مثبت است؟

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 4x - 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 2x + 4 = 0 \quad (3)$$

□ تست ۷) معادله ی درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه ی مثبت است بازه

مقادیر m ، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹، مشابه تجربی خارج ۹۷ و تجربی ۹۶)

- (۱) $(-4 و 0)$ (۲) $(-2 و -4)$ (۳) $(0 و -6)$ (۴) $(-4 و -6)$

□ تست ۸) به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله ی درجه دوم $x^2 + (m + 1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$

فاقد ریشه ی حقیقی است؟ (تجربی خارج ۸۹) (تمرین)

(۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-3 < m < 4$

(۳) $-2 < m < 4$ (۴) $-1 < m < 5$

□ تست ۹) معادله $x^2 - 2mx + 6 - m = 0$ به ازای کدام مقادیر m دارای دو ریشه مساوی

است؟

- (۱) $3 و -2$ (۲) $2 و -3$ (۳) $1 و -\frac{3}{2}$ (۴) $1 و -\frac{3}{2}$

□ تست ۱۰) اگر معادله $ax^2 - 4(a+2)x + 9 = 0$ دو جواب حقیقی مثبت داشته باشد، a

چند مقدار طبیعی نمی تواند باشد؟ (موج آزمون)

(تمرین)

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

□ تست ۱۱) اندازه اضلاع مثلث قائم الزاویه ای، به صورت $x+1$, $2x+1$, $2x+3$ است. مساحت

(ریاضی ۹۹)

مثلث، کدام است؟

۳۹(۴)

۴۵(۳)

۵۶(۲)

۶۰(۱)

□ تست ۱۲) به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x

(ریاضی خارج ۹۵)

ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می کند؟

$-2 < m < 1$ (۲)

$m < -2$ یا $m > 1$ (۱)

$1 < m$ (۴)

$m < -2$ (۳)

روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله درجه دوم:

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند آن گاه داریم:

$$۱) \alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$$

$$۲) P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$۳) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$۴) \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$۵) \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS$$

$$۶) \alpha^4 + \beta^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

☞ **نکته** در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$

الف) اگر $a + b + c = 0$ (مجموع ضرایب صفر باشد) آن گاه یک ریشه معادله (۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

ب) اگر $a + c = b$ آن گاه یک ریشه‌ی معادله (۱) و ریشه‌ی دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

☞ **نکته** هرگاه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ یکی از ریشه‌ها k برابر ریشه دیگر باشد بین ضرایب رابطه زیر برقرار است؟

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

☞ **نکته** هرگاه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، یکی از ریشه‌ها k واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر یا کمتر باشد داریم:

$$\Delta = k^2 a^2$$

□ تست ۱۳) به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه عددی بین دو ریشه حقیقی معادله

(ریاضی ۸۴)

$$m^2 - 4x^2 - 3x + m = 0 \text{ است؟}$$

۴(۴) -

۴(۳)

۳(۲) -

۲(۱)

□ تست ۱۴) اگر رابطه $3x_1 + x_2 = 14$ بین ریشه‌های معادله $x^2 - 8x + m - 1 = 0$ برقرار باشد

آن گاه مقدار m کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

□ تست ۱۵) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند حاصل $\alpha^4 + \beta^4$ کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۱۷۱(۴)

۱۶۱(۳)

۱۵۱(۲)

۱۴۱(۱)

□ تست ۱۶) اگر α و β جواب های معادله $x^2 - x - 7 = 0$ باشند، مقدار عبارت $\alpha + 2\beta^2$

کدام است؟ (موج آزمون)

(تمرین)

$$\frac{15}{2} (4)$$

$$\frac{13}{2} (3)$$

$$\frac{11}{2} (2)$$

$$\frac{9}{2} (1)$$

□ تست ۱۷) اگر یکی از ریشه های معادله $x^2 - mx + 27 = 0$ مجذور ریشه دیگر باشد آن گاه

مقدار m کدام است؟

$$-6 (4)$$

$$6 (3)$$

$$12 (2)$$

$$-12 (1)$$

□ تست ۱۸) اگر x' و x'' ریشه های معادله ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ و $x' > x''$ باشد حاصل عبارت

$\sqrt{x'} - \sqrt{x''}$ کدام است؟

$$2 (4)$$

$$\sqrt{2} (3)$$

$$-\sqrt{2} (2)$$

$$\pm \sqrt{2} (1)$$

□ تست ۱۹) به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه ی معادله ی درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می باشد؟
(تجربی ۹۵)

۶(۴

۵(۳

۴(۲

۳(۱

□ تست ۲۰) اگر در معادله ی $ax^2 - bx + c = 0$ رابطه ی $25a+5b+c=0$ بین ضرایب برقرار باشد، یکی از ریشه های این معادله کدام است؟
(گزینه دو ۹۶)

$-\frac{c}{a}(4$

$-\frac{c}{125a}(3$

$-\frac{c}{25a}(2$

$-\frac{c}{5a}(1$

□ تست ۲۱) اگر α و β ریشه های معادله $3x^2 - x - 1 = 0$ باشند حاصل عبارت $(3\alpha^2\beta - \alpha^2\beta + 3)$ کدام است؟

$\frac{8}{3}(4$

$\frac{7}{3}(3$

$\frac{6}{3}(2$

$\frac{5}{3}(1$

□ تست ۲۲) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - (4 + \alpha)x + 2\alpha + 2 = 0$ باشند، مقدار α

کدام است؟ (میکرو گاج) (تمرین)

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

□ تست ۲۳) اگر x' و x'' ریشه های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{x'^2}{x''} + \frac{x''^2}{x'}$

کدام است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۵۲ (۳) ۶۴ (۴) ۷۶

□ تست ۲۴) به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله ی

$mx^2 + (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) $1\frac{9}{5}$ (۴) $-1\frac{9}{5}$

□ تست ۲۵) معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد مقدار m کدام است؟ (تجربی ۹۹)

$$\frac{7}{2}(-1) \quad 3(2) \quad -1(3) \quad -\frac{5}{2}(4)$$

□ تست ۲۶) فرض کنید x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2 - 4x = x$ باشند. ریشه های کدام معادله $x_1^2 + \frac{1}{x_1}, x_2^2 + \frac{1}{x_2}$ است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

$$4x^2 + 51x = 221(2) \quad 4x^2 = 51x + 221(1)$$

$$4x^2 + 51x = 197(4) \quad 4x^2 = 51x + 197(3)$$

□ تست ۲۷) فرض کنید x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2 - 5x = 0$ باشند. $\frac{1}{(x_1+1)^2}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^2}$ ریشه

های کدام معادله هستند؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(تمرین)

$$125x^2 = 16x + 1 \quad (2)$$

$$125x^2 + 16x = 1 \quad (1)$$

$$125x^2 + 12x = 1 \quad (4)$$

$$125x^2 = 12x + 1 \quad (3)$$

تتشکیل معادله درجه دوم:

تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم باشد:

$$\alpha, \beta \text{ معلوم} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \text{معلوم} \\ P = \alpha \cdot \beta = \text{معلوم} \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

□ تست ۲۸) کدام معادله زیر ریشه های آن $2 - \sqrt{4-a}$ و $2 + \sqrt{4-a}$ می باشند؟

$$x^2 + ax + 4 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 4x - a = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + ax - 4 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 4x + a = 0 \quad (3)$$

تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌هایش، رابطه معینی با ریشه‌های معادله درجه دوم مفروض داشته باشند:

روش اول: S و P معادله جدید را تشکیل می‌دهیم و با قرار دادن آنها در معادله $X^2 - Sx + P = 0$ معادله‌ی جدید را می‌یابیم.

روش دوم: ریشه‌های معادله جدید را با (X) بزرگ و ریشه‌های معادله قدیم (معادله‌ی اولی) را با x (کوچک) نمایش می‌دهیم، رابطه بین ریشه‌های معادله جدید و قدیم را نوشته و سپس ریشه قدیم را بر حسب جدید به دست آورده و در معادله قدیم به جای x بر حسب X جایگزین می‌کنیم تا پس از ساده کردن و مرتب نمودن عبارت‌ها، معادله جدید به دست آید:

□ **تست ۲۹)** معادله درجه دومی که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد کدام است؟

$$(۲) \quad x^2 + 52x + 1 = 0$$

$$(۱) \quad x^2 - 52x + 1 = 0$$

$$(۴) \quad x^2 - 64x + 1 = 0$$

$$(۳) \quad x^2 + 64x + 1 = 0$$

□ تست ۳۰ به ازای کدام مقدار m هر یک از ریشه های معادله ی $ax^2 - mx - 8 = 0$

توان سوم ریشه های معادله ی $2x^2 - x - 2 = 0$ می باشد؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱۵(۴

۱۳(۳

۱۱(۲

۹(۱

□ تست ۳۱ اگر یکی از ریشه های معادله $x^2 + \frac{1}{k}x + 27 = 0$ مربع ریشه دیگر باشد. آنگاه

۱۲k کدام است؟ (آزمون های گاج)

-۱(۴

۱(۳

۲(۲

-۲(۱

□ تست ۳۲) کدام یک از معادلات زیر ریشه‌های آن ۳ برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ است؟

(۲) $x^2 - 15x + 2 = 0$

(۱) $x^2 - 5x + 18 = 0$

(۴) $x^2 + 15x - 18 = 0$

(۳) $x^2 - 15x + 18 = 0$

□ تست ۳۳) به ازای دو مقدار a یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a کدام است؟
(تجربی ۱۴۰۱)

۱۸(۴)

۱۶(۳)

۹(۲)

۸(۱)

□ تست ۳۴) ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله درجه دوم

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \text{ یک واحد کمتر است؟ (سراسری تجربی ۹۴)}$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (۳)$$

□ تست ۳۵) ریشه های معادله ی درجه ی دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه های معادله

$x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. b کدام است؟ (تجربی ۸۷) (تمرین)

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$-1$$

$$-2$$

۵۸ چند نکته در تشکیل معادله جدید:

اگر معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مفروش باشد و بخواهیم معادله درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه هایش:

(۱) عکس ریشه های معادله اول باشد کافی است جای a و c را با هم عوض کنیم و یا $x \rightarrow \frac{1}{x}$

- (۲) قرینه ریشه‌های معادله اول باشد کافی است علامت b را قرینه کنیم و یا $x \rightarrow -x$
- (۳) عکس و قرینه ریشه‌های معادله اول باشد کافی است جای a و c را عوض کرده و علامت b را قرینه کنیم.
- (۴) k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله اول باشد کافی است $x \rightarrow x - k$
- (۵) k واحد کمتر از ریشه‌های معادله اول باشد کافی است $x \rightarrow x + k$
- (۶) k برابر ریشه‌های معادله اول باشد کافی است $x \rightarrow \frac{x}{k}$ شود.

□ تست ۳۶ ریشه‌های کدام یک از معادلات زیر عکس ریشه‌های معادله $3x^2 - x - 1 = 0$ است؟

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad (۲)$$

$$-x^2 + x + 3 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + x + 3 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 + x - 3 = 0 \quad (۳)$$

📌 نکته هرگاه در معادله درجه دوم، $\frac{c}{a} < 0$ باشد همواره $\Delta > 0$ بوده و معادله دارای دو ریشه مختلف‌العلامه می‌باشد.

📌 نکته شرط آن که دو معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ریشه‌های مشترک داشته باشند آن است که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

📌 نکته) اگر دو معادله درجه دو، دارای یک ریشه مشترک باشند، می توان با حذف جمله درجه دو این ریشه مشترک را پیدا کرد.

📌 تست ۳۷) اگر دو معادله $mx^2 + 5x - 7 = 0$ و $3mx^2 - 10x + 4 = 0$ دارای یک ریشه مشترک باشند مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

معادلات دو مجذوری: $ax^2 + bx^2 + c = 0$

(۱) روش حل: برای حل این معادلات ابتدا با تغییر متغیر $x^2 = t$ معادله را به معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ ساده نموده و پس از حل آن و محاسبه t مقدار x را به دست می آوریم.

📌 تست ۳۸) معادله $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) یک ریشه (۲) ریشه ندارد (۳) ۲ ریشه (۴) ۴ ریشه

□ تست ۳۹) معادله ی $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ چند ریشه ی حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)

(تمرین)

- ۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

□ تست ۴۰) اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادله $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب s و P باشند، حاصل عبارت $2P^2 - 2SP + 2S$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

- ۱(۱) $59 - 7\sqrt{69}$ ۲(۲) $7 + \sqrt{69}$ ۳(۳) 50 ۴(۴) $59 + 7\sqrt{69}$

۲) بحث در تعداد و علامت ریشه های معادله دو مجذوری:

$$ax^2 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} at^2 + bt + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

چهار ریشه حقیقی متمایز $\Rightarrow \frac{-b}{a} > 0$, $\frac{c}{a} > 0$, $\Delta > 0$

ریشه حقیقی ندارد $\Rightarrow \frac{-b}{a} < 0$, $\frac{c}{a} > 0$, $\Delta > 0$

دو ریشه ی حقیقی متمایز $\Rightarrow \frac{c}{a} < 0$, $\Delta > 0$

□ تست ۴۱) اگر معادله $mx^4 - 4x^2 + m - 3 = 0$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد،

حدود m کدام است؟

- (۱) $1 < m < 3$ (۲) $m > 3$ (۳) $-1 < m < 4$ (۴) $3 < m < 4$

۸۸ محاسبه‌ی تعداد نقاط تلاقی دو تابع:

برای محاسبه نقاط تلاقی دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ کافی است این دو تابع را در یک دستگاه به صورت زیر قرار داده و دستگاه را حل نماییم:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow \text{تعداد نقاط تلاقی دو تابع}$$

سپس مقدار x به دست آمده را در یکی از توابع قرار داده تا عرض نقطه‌ی تلاقی دو تابع به دست آید.

□ تست ۴۲) نمودار تابع $y = \frac{1}{x-2}$ و $y = x+2$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) نقطه تلاقی ندارند

□ تست ۴۳ خط به معادله $y = mx + 4$ با منحنی به معادله $y = -x^2 + 2x$ هیچ نقطه مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر m کدام است؟
(تجربی ۸۶)

$$m < 0 \quad (1) \quad m > 4 \quad (2) \quad -1 < m < 4 \quad (3) \quad -2 < m < 6 \quad (4)$$

□ تست ۴۴ با توجه به شکل زیر، مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟ (IQ گاج)

(تمرین)

$$-\frac{7}{2} \quad (1)$$

$$\frac{11}{4} \quad (2)$$

$$\frac{7}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{11}{4} \quad (4)$$

۷ محاسبه تعداد ریشه‌های یک معادله به کمک رسم نمودار تابع:

از لحاظ هندسی تعداد ریشه‌های معادله $f(x) = g(x)$ همان تعداد نقاط برخورد نمودارهای دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ می‌باشد.

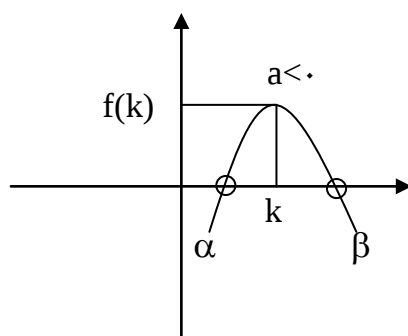
برای حل معادله‌ی $h(x) = 0$ ابتدا $h(x)$ را به دو تابع مانند f و g تفکیک می‌کنیم به طوری که رسم نمودار دو تابع f و g برای ما امکان پذیر باشد سپس نمودار دو تابع f را در یک دستگاه مختصات رسم نموده و تعداد نقاط تلاقی آنها را می‌یابیم.

📖 مثال ۴۵) معادله $x^2 - |x| - 1 = 0$ دارای چند ریشه است؟

📐 تست ۴۶) معادله $|x^2 - 1| = |x|$ دارای چند ریشه است؟

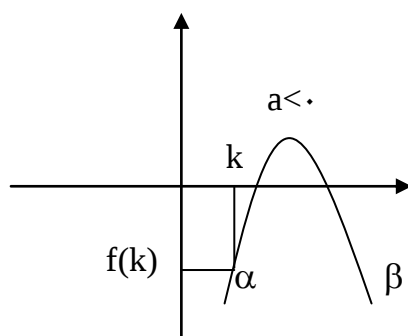
(۱) ریشه ندارد (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱

نکته) در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c$ اگر k بین دو ریشه باشد خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \alpha < k < \beta \\ af(k) < 0 \end{cases}$$

اما اگر k خارج در ریشه باشد خواهیم داشت:



$$\begin{cases} k < \alpha < \beta \text{ یا } \alpha < \beta < k \\ af(k) > 0 \end{cases}$$

📖 مثال ۴۷) اگر در معادله درجه دوم $2x^2 + (m-6)x + 2m = 0$ داشته باشیم $\alpha < 2 < \beta$ مقدار m را بدست آورید:

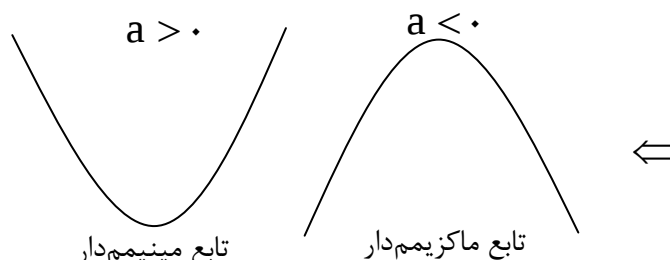
تابع درجه دوم:

هر تابع به صورت $(a \neq 0)y = ax^2 + bx + c$ نمایش یک تابع درجه دوم است.

ماکزیمم یا می‌نیمم:

ماکزیمم یا می‌نیمم مقدار تابع درجه دوم در نقطه‌ای به طول $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید:

الف) اگر $a > 0$ تابع می‌نیمم‌دار است و می‌نیمم آن $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ است.



ب) اگر $a < 0$ تابع ماکزیمم‌دار است و ماکزیمم آن $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ است.

☞ نکته) در تابع درجه دوم $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

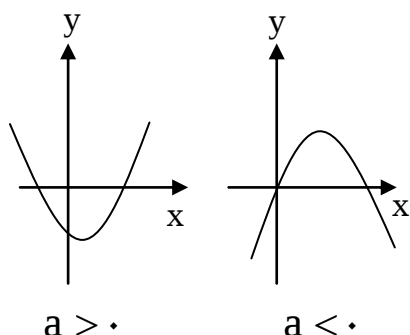
محور تقارن:

محور تقارن تابع خط $x = -\frac{b}{2a}$ است که از نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) عبور می‌کند.

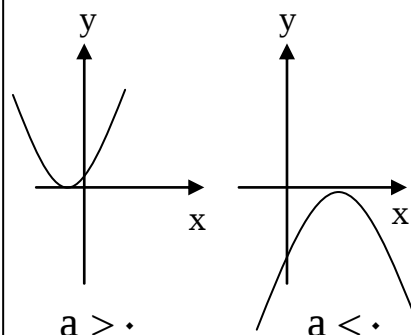
نمودار تابع درجه دوم:

نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با توجه به شرایط a و Δ به صورت‌های زیر است:

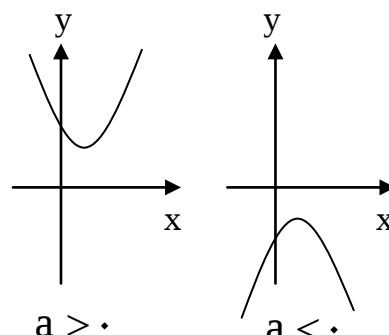
۱) $\Delta > 0$



۲) $\Delta = 0$



۳) $\Delta < 0$



☒ تذکر) با توجه به حالت (۱): اگر $ac < 0$ آن گاه نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

📖 مثال ۴۸) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + 4x - 1$ از کدام نواحی عبور می‌کند؟

☒ تذکر) با توجه به حالت (۲):

الف) اگر $a > 0$ و $\Delta = 0$ تابع از بالا بر محور x ها مماس است.

ب) اگر $a < 0$ و $\Delta = 0$ تابع از پایین بر محور x ها مماس است.

✗ تذکر) با توجه به حالت (۳):

الف) اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ ، $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ یعنی تابع همواره بالای محور x هاست.

ب) اگر $a < 0$ و $\Delta < 0$ ، $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ یعنی تابع همواره پایین محور x هاست.

□ تست ۴۹) محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ منحنی را در نقطه ای به عرض (-2) قطع

می کند. طول پاره خطی که سهمی روی محور x ها ایجاد می کند، کدام است؟ (قلمچی ۹۴)

(تمرین)

$4\sqrt{2}(4)$

$2\sqrt{2}(3)$

$4\sqrt{2}(2)$

$2\sqrt{2}(1)$

□ تست ۵۰) نقطه ی مینیمم تابع با ضابطه ی $y = x^2 + ax + 2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد

a کدام است؟

$4(4)$

$2(3)$

$-2(2)$

$-4(1)$

□ تست ۵۱) به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، کم ترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 2(x + a) - 1$ در ربع سوم قرار دارد؟
(قلمچی ۹۶)

- (۱) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ (۳) $0 < a < 1$ (۴) $a > 0$

□ تست ۵۲) به ازای کدام مقادیر a منحنی به معادله $y = ax^2 - (a + 2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی گذرد؟ (ریاضی ۸۹)
(تمرین)

- (۱) $a \leq -2$ (۲) $a > -2$ (۳) $a > 0$ (۴) $-2 \leq a < 0$

□ تست ۵۳) به ازای چند مقدار a سهمی $y = x^2 + (3 + 2a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی گذرد؟
(تجربی ۱۴۰۱)

- (۱) هیچ مقدار a (۲) تمام مقادیر a (۳) ۱ (۴) ۲

□ تست ۵۴) تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + ax + 4$ مینیمی برابر ۳ دارد، a کدام است؟

- (۱) ± 4 (۲) ± 3 (۳) ± 2 (۴) ± 1

□ تست ۵۵) اگر عبارت $(a - 1)x^2 + (a - 1)x + 1$ به ازای مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟ (ریاضی ۹۱)

- (۱) $\{a | 1 < a < 5\}$ (۲) $\{a | a < 1\}$ (۳) $\emptyset$ (۴) $\mathbb{R}$

□ تست ۵۶) به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x ها است؟
(تجربی خارج ۹۶)

۴) $-2 < a < 1$

۳) $a > 3$

۲) $a < -2$

۱) $a < 1$

□ تست ۵۷) به ازای کدام مجموعه مقادیر m سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x ها است؟ (ریاضی خارج ۹۸)
(تمرین)

۴) $2 < m < 6$

۳) $2 < m < 4$

۲) $2 < m < 5$

۱) $1 < m < 5$

□ تست ۵۸) اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k = 0$ برابر صفر باشد مقدار k کدام است؟

۴) ۴

۳) ۱

۲) -۱

۱) -۴

□ تست ۵۹) به ازای کدام مقدار m نمودار تابع با ضابطه $y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$

بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

□ تست ۶۰) نمودارهای دو تابع با ضابطه $y = 2x^2 + ax + b$ و $y = 2x + b$ در نقطه‌ای به

طول ۲ بر روی محور x ها متقاطع اند، a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۴

□ تست ۶۱) تابع درجه ی دوم f محور طول ها را در ۳ و ۲- و محور عرض ها را در ۱ قطع

می کند. مقدار $f(1)$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۵)

(تمرین)

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) ۱ (۴) $-\frac{1}{12}$

□ تست ۶۲) نمودار تابع f با ضابطه $\begin{cases} ax - 3 & x < 0 \\ 2bx^2 + 7 & x \geq 0 \end{cases}$ از نقطه $(3, -1)$ عبور

(کانون فرهنگی آموزش)

می کند. اگر $f(2) = 0$ باشد. ab کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{7}{2}$

□ تست ۶۳) کدام نمودار مربوط به تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرایط $c > 0$,

(میکرو گاج)

$b > 0$ است؟

□ تست ۶۴) نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 2x - 8$ را حداقل چند واحد به سمت راست

منتقل کنیم تا هر دو نقطه ی تلاقی آن با محور طول ها، در x های نامنفی باشد؟ (تمرین)

(گزینه دو ۹۴)

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

□ تست ۶۵) شکل زیر، نمودار تابع درجه ی دوم به معادله ی $y = ax^2 + bx + c$ را نشان

می دهد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

(قلم چی ۹۴)

۶(۴

۶(۳

۵(۲

۵(۱

□ تست ۶۶) محیط مستطیل ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل مساحت آن بیشترین

مقدار است؟ (سنجش ۹۴)

(تمرین)

۴۵(۴

۵۰(۳

۶۰(۲

۷۵(۱

□ تست ۶۷) میخواهیم پنجره ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی الاضلاع در بالای آن بسازیم. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، ابعاد مستطیل چند متر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ را $0/51$ فرض کنی (د.د.)
(کانون فرهنگی آموزش ۹۷ و برگرفته از کتاب درسی)

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{1}{5} (4)$$

$$\frac{3}{5} \text{ و } \frac{3}{2} (3)$$

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{3}{2} (2)$$

$$\frac{3}{5} \text{ و } \frac{3}{4} (1)$$

□ تست ۶۸) اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{-x^2+bx+c}{x+d}$ به صورت مقابل باشد، مقدار $b+c+d$ کدام است؟
(مهر و ماه)

$$-1(1)$$

$$1(2)$$

$$-2/5(3)$$

$$2/5(4)$$

□ تست ۶۹ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر ۴ سال دیگر حاصل ضرب سن آن ها ۶۰ شود. سن برادر بزرگ تر کدام است؟
(کتاب درسی)

۱۰(۴

۸(۳

۴(۲

۶(۱