

فصل ششم

جز صحیح

۵۵ جزء صحیح:

تعریف: اگر $x \in \mathbb{R}$ باشد بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x را کف یا جزء صحیح x می‌نامیم و آن را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم. یعنی:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} \rightarrow n \leq x < n+1 \quad \text{یا} \quad x = n + p, 0 \leq p < 1 \Rightarrow [x] = n$$

تعریف: اگر $x \in \mathbb{R}$ باشد آن گاه $x - [x]$ را جزء کسری x می‌نامیم و آن را با P نشان می‌دهیم.

$$P = x - [x] \quad \text{یا} \quad x = [x] + P \quad 0 \leq P < 1$$

□ **تست ۱)** اگر x عددی صحیح مثبت باشد، حاصل عبارت $\left[\frac{x^2+2}{x^2+1} \right] + [\sqrt{x^2+1}]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)
(سمپاد علامه حلی ۹۹)

$$x+2(4)$$

$$3(3)$$

$$x+1(2)$$

$$x(1)$$

□ **تست ۲)** حاصل عبارت $\left[\frac{9}{10} \right] + \left[\frac{9}{10} + \frac{1}{100} \right] + \left[\frac{9}{10} + \frac{2}{100} \right] + \dots + \left[\frac{9}{10} + \frac{21}{100} \right]$ کدام است؟
(میکرو گاج)

$$14(4)$$

$$13(3)$$

$$12(2)$$

$$11(1)$$

۵۵ برخی از خواص جزء صحیح:

$$1) 0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow \begin{cases} x - [x] = 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 < x - [x] < 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

(مثال )

$$3) y = 2x - 2[x]$$

$$4) y = \sqrt{x - [x] - \frac{3}{4}}$$

$$5) y = \sqrt{x - 9 \left[\frac{x}{9} \right]} + 5$$

□ تست ۶) اگر $g(x) = [x]$, $f(x) = 2x - [2x]$ باشد، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

[] علامت جزء صحیح است.)

{0, 1} (۴)

{1} (۳)

{0} (۲)

{-1} (۱)

□ تست ۷) اگر $f(x) = x - [x]$ آن گاه برد تابع $g(x) = f(2x - 3) - 2f(x)$ کدام است؟
(تجربی خارج ۹۲)

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $\{-1, 0\}$ (۴) $\{0, 1\}$

□ تست ۸) اگر $f(x) = 2x - [2x]$ ، $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع $g \circ f$ کدام است؟
(تمرین ۹۹)

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[1, 4]$

تمرین:

$$۹) y = x - ۳ \left[\frac{x}{۳} \right] - ۱$$

تمرین:

$$۱۰) y = \frac{۱}{\sqrt{x - [x]}}$$

مجموعه جواب معادلات زیر را بیابید؟

۱۱) $[2x] + x = 6$

۱۲) $x + [-3x] + [\Delta x] = 3$

خواص دوم:

$$۲) [x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow x \geq [x] \Rightarrow \begin{cases} x = [x] & x \in \mathbb{Z} \\ x > [x] & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

نتیجه $\Rightarrow [x'] \geq [x] \Rightarrow \begin{cases} [x'] = [x] & x \in [0, \sqrt{2}) \\ [x'] > [x] & x \in \mathbb{R} - [0, \sqrt{2}) \end{cases}$

نکته $\Rightarrow [x'^n] = [x] \Rightarrow x \in [0, \sqrt[n]{2})$

مثال

۱۳) $y = \sqrt{[x] - [x']}$

$D_f = ?$

$$۱۴) y = \sqrt{[x] - [x^2]}$$

تمرین:

$$۱۵) y = \sqrt{|x| - [x]}$$

تمرین:

$$۱۶) y = \sqrt{[x] - x}$$

خواص سوم:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$y = [mx] + [-mx] \quad T = \frac{1}{|m|}$$

مثال 

$$(۱۷) [x] + ۲[-x] = ۳$$

$$(۱۸) [۲x] + [-۲x] = ۴$$

$$(۱۹) y = ([x] + [-x])^{-1} \quad D_f = ?$$

□ تست ۲۰) اگر $f(x) = x^2 + 3x - 4$ و $g(x) = [x] + [-x]$ باشند و بدانیم $f(g(x)) = -۳$ است. مجموعه مقادیر x کدام است؟
(۱۹ گاج)

$$\emptyset(۴)$$

$$\mathbb{R} - \mathbb{Z}(۳)$$

$$\mathbb{Z}(۲)$$

$$\mathbb{R}(۱)$$

تمرین:

$$(۲۱) ۲[x] + [-x] = ۶$$

تمرین:

$$۲۲) \left[x - \frac{1}{2} \right] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = ۱۹$$

تمرین:

$$۲۳) y = \frac{1}{[x] + [-x] + 2}$$

خواص چهارم:

$$[x + y] \geq [x] + [y] \Rightarrow [x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + ۱$$

مثال

$$۲۴) \begin{array}{l} [x] = ۲ \\ [x] = ۳ \end{array} \Rightarrow [x + y] = ?$$

$$۲۵) ۵^x = ۸۹۲ \Rightarrow [x] = ?$$

$$۲۶) A = [\log_{\sqrt{2}}] = ?$$

خواص پنجم:

$$[x \pm n] = [x] \pm n \quad n \in \mathbb{Z}$$

مثال 

$$۲۷) \left[\frac{3x+1}{x} \right] = 5$$

$$۲۸) [x+1][x-2] = 4$$

$$۲۹) y = \left[\frac{3x^2+2}{x^2+1} \right] =$$

$$۳۰) [x + [x + [x \dots]]] = n$$

□ تست ۳۱) مجموعه جواب معادله $[x + 2] + [x + 3[x]] = 27$ به صورت بازه $[a, b)$ است، b کدام است؟
(خیلی سبز)

۷(۴

۶/۵(۳

۶(۲

۵/۵(۱

□ تست ۳۲) مجموعه جواب معادله $||[x + [x] + 5]| = 1$ کدام است؟ (۱۹ گاج)

۴) ریشه ندارد ۳) $\{-3, -2\}$ ۲) $-3 \leq x < -1$ ۱) $-3 \leq x < -2$

تمرین:

۳۳) $([x] - 2)! = 1$

۳۴) $[x^2 - 6x] = [x^2 - 10x] = 7 \Rightarrow [(x - 4)^2] = ?$

تمرین:

۳۵) $[x + 2[x + 3[x]]] = 18$

تمرین:

خواص ششم:

$$\text{if } x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$$

خواص هفتم:

$$\left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{[x]}{n} \right] \quad x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$$

مثال

$$36) \left[\frac{\sqrt{175}}{4} \right] =$$

خواص هشتم:

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & n = 2k \\ \frac{n-1}{2} & n = 2k-1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

مثال

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$37) y = (-1)^n \left[\frac{n}{2} \right]$$

خواص نهم:

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال (📖)

$$[2x] = 38$$

$$[2x] - [x] = 2$$

□ تست ۴۰) برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام

(سراسری تجربی ۹۱)

است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(موج آزمون)

□ تست ۴۱) اگر $x^3 = -20$ مقدار $[2x]$ کدام است؟ (تمرین)

-۳ (۴)

-۴ (۳)

-۵ (۲)

-۶ (۱)

تمرین:

$$۴۲) [4x] =$$

تمرین:

$$۴۳) [x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = 3$$

تمرین:

$$۴۴) [2x] - [x] + \left[x - \frac{1}{2} \right] = 3$$

خواص دهم: نامساوی‌های شامل جزء صحیح

$$۱) n < [x] \Rightarrow n + 1 \leq x$$

$$۲) n \leq [x] \Rightarrow n \leq x$$

$$۳) [x] < n \Rightarrow x < n$$

$$۴) [x] \leq n \Rightarrow x < n + 1 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

مثال 

$$٤٥) ||x - ١|| < ٢$$

$$٤٦) [x' + y'] = ٣ \quad s = ?$$

$$٤٧) f(x) = \sqrt{-\sin^n n[x]}$$

$$٤٨) f(x) = \sqrt{[x]^r - ٢[x]}$$

تمرین: 

$$٤٩) f(x) = \sqrt{[x^r] - ١} \quad D_f = ?$$

حدود M $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - 3x - [m] > 0$ ۵۰)

$D_{f([x])} = ?$ $f(x) = \sqrt{(1-x)(x-2)}$ ۵۱)

$f(x) = [|x-2|+1][|x-1|-3] < 0$ ۵۲)

□ تست ۵۳) اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟

([] نماد جزء صحیح است.) (تمرین)

(قلم چی ۱۴۰۰)

۱(۴

صفر(۳

-۱(۲

-۲(۱

□ تست ۵۴) اگر $x^4 < x^2$ باشند، $[x]$ چند مقدار متفاوت دارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(گاج ۱۴۰۰)

۴(۴

۲(۳

۱(۲

۳(۱

(نردبان خیلی سبز)

□ تست ۵۵) کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

$y = x - [x]$ (۲

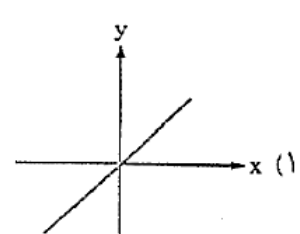
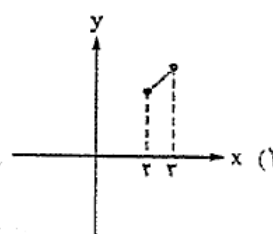
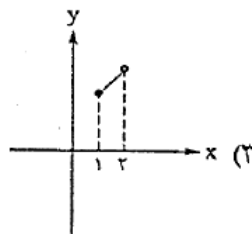
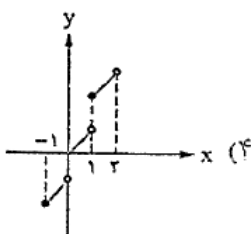
$y = [x]$ (۱

$y = [x] + [-x]$ (۴

$y = x + [x]$ (۳

□ تست ۵۶) اگر $f^{-1}(x)$ وارون تابع $F(x) = x + [x]$ با دامنه $D_f = [1, 2)$ باشد، آن گاه نمودار

تابع $y = (f \circ f^{-1})$ کدام است؟



□ تست ۵۷ تابع F با دامنه $(۲ و ۳)$ و ضابطه $F(x) = [-x]x + [x]$ تعریف شده است مقدار

(قلم چی ۹۹)

$f^{-1}(-5)$ کدام است؟ (تمرین)

$$\frac{8}{3}(۴)$$

ناموجود (۳)

$$3(۲)$$

$$\frac{5}{2}(۱)$$

لله تمرین:

۵۸) $|[x + ۲]| \leq ۱$

لله تمرین:

۵۹) $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$

لله تمرین:

۶۰) $[\sqrt{x}] \leq \sqrt{۳}$

خواص دوازدهم: چگونگی رسم نمودار تابع $y = f(x) - [f(x)]$

$$۶۱) y = \cos x - [\cos x]$$

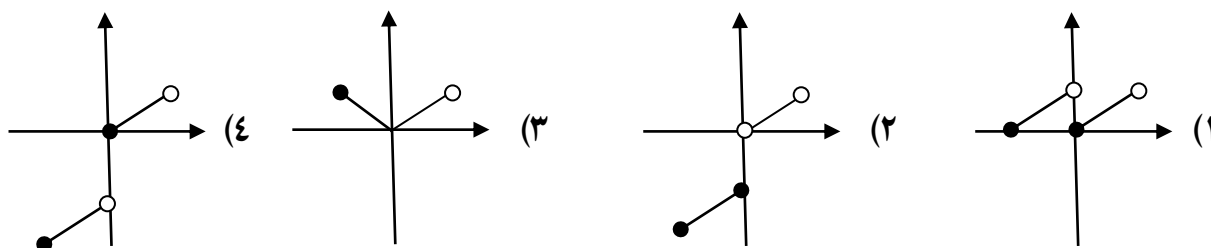
$$۶۲) y = x^2 - [x^2]$$

۸ نمودارهای روابط شامل جز صحیح:

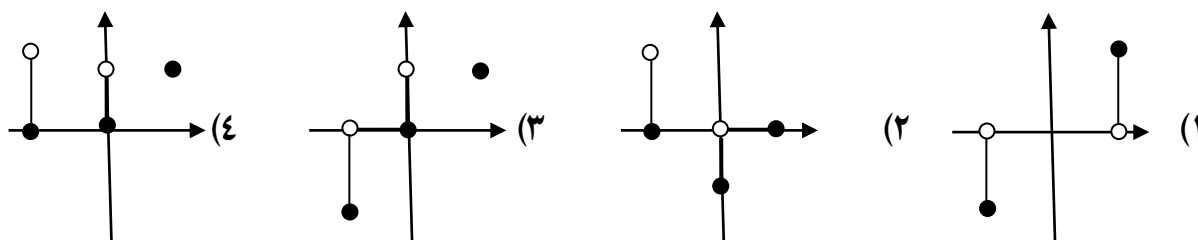
♦ رسم نمودار توابع شامل $[f(x)]$ در بازه (a,b) :

برای رسم چنین نمودارهایی، ابتدا بازه‌ی داده شده را چنان به بازه‌هایی کوچکتر تقسیم کنید، که در هر یک از آنها $f(x)$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار گیرد. سپس با توجه به دامنه‌ی داده شده، برد تابع را تعیین کنید و سپس آن را به بازه‌های کوچکتری چنان تقسیم کنید که در هر بازه $f(x)$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار گیرد.

□ تست ۶۳ نمایش هندسی $y = x + [x]$ در فاصله $-1 \leq x < 1$ کدام است؟



□ تست ۶۴ نمودار $x = [y]$ وقتی که $x, y \in [-1, 1]$ به کدام شکل است؟



حل نامعادلات شامل $[f(x)]$:

برای حل معادلاتی که شامل $[f(x)]$ هستند، به توصیه‌های زیر توجه کنید:

- (۱) گاهی می‌توانید با استفاده از اعمال جبری از معادله‌ی داده شده مقدار $[f(x)]$ را بیابید.
- (۲) استفاده از نمودارها، گاهی می‌تواند در تعیین تعداد ریشه‌ها یا حتی یافتن مقدار ریشه‌ها مفید باشد.
- (۳) استفاده از ویژگی‌های جز صحیح، می‌تواند در ساده کردن و گاهی حل معادله‌ی شامل جز صحیح مفید باشد.
- (۴) اگر $a \notin \mathbb{Z}$ آن گاه معادله‌ی $[f(x)] = a$ جوابی ندارد.
- (۵) اگر $n \in \mathbb{Z}$ آن گاه مجموعه جواب معادله‌ی $[f(x)] = n$ همان مجموعه جواب نامعادله‌ی $n < f(x) < n+1$ خواهد بود.

□ تست ۶۵ معادله‌ی $x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} = [x]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

□ تست ۶۶ معادله‌ی $[x] = \frac{x}{3}$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) بی‌شمار

□ تست ۶۷) معادله $[x]^2 - [x] - 6 = 0$ چند جواب قابل قبول دارد؟ (منتشران)

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

□ تست ۶۸) مجموعه جواب های معادله $[x + [x]] = [x - [x]] - 2$ کدام است؟

(موج آزمون)

- ۱) $(0, 1)$ ۲) $(-1, 0)$ ۳) $(0, -1]$ ۴) $(-2, 0]$

□ تست ۶۹) چه تعداد از تساوی های زیر درست است؟ (میکرو گاج)

الف) $[x + [x]] = 2[x]$ ب) $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x] + \frac{1}{2}$ ج) $[x - [x]] = 0$

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

□ تست ۷۰) اگر مجموعه جواب معادله $\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{3}{2}\right] = 3$ بازه $[a, b)$ باشد، کدام $a+b$ است؟ (تمرین)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۳(۴

۲/۵(۳

۲(۲

۱/۵(۱

□ تست ۷۱) مجموعه‌ی جواب نامعادله $[2x] < [x + 5]$ کدام است؟

(۱) $(-4/5, 5)$ (۲) $(-\infty, 4/5)$ (۳) $(4/5, +\infty)$ (۴) $(-4/5, +\infty)$

□ تست ۷۲) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ ، $x \in [-2, 6)$ از چند پاره خط مساوی هم،

تشکیل شده است؟

۶ (۴

۵ (۳

۴ (۲

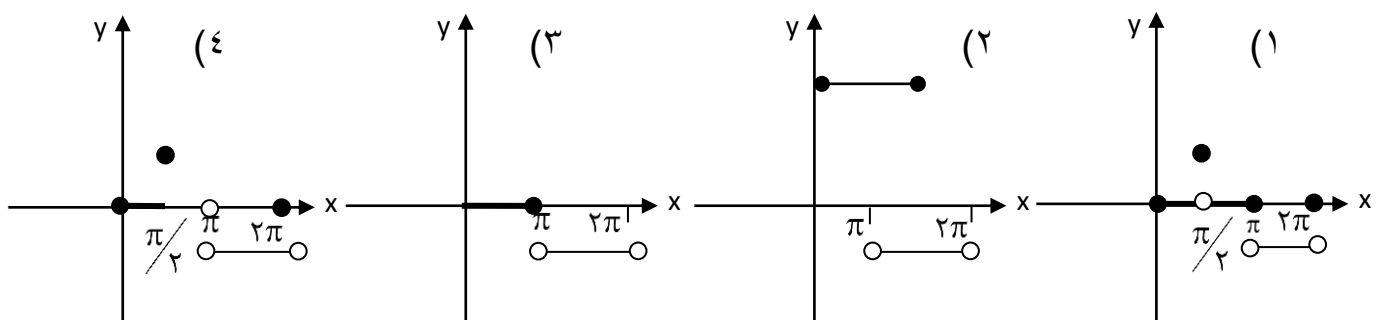
۳ (۱

□ تست ۷۳) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x - [x]$ ؛ $x \in [-2, 3]$ از n پاره خط مساوی به اندازه

L تشکیل شده است. دو تایی مرتب (n, L) کدام است؟

- (۱) $(4, 1)$ (۲) $(4, \sqrt{2})$ (۳) $(5, 1)$ (۴) $(5, \sqrt{2})$

□ تست ۷۴) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [\sin x]$ کدام است؟



□ تست ۷۵ نمودار تابع $y = 2|[3x]| - 1$ به ازای $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

