

فصل هفتم

دنباله

تعریف دنباله

تعریف: هر تابع که دامنه‌اش اعداد طبیعی و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد، یک دنباله نامتناهی از اعداد حقیقی نامیده می‌شود و به صورت $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود. - معمولاً جمله عمومی یک دنباله را با a_n نمایش می‌دهیم.

✖ **تذکره** یک دنباله را با $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نمایش می‌دهیم. می‌توانیم به جای این نوع نمایش از نماد $\{a_n\}$ استفاده کنیم که نشانگر کلیه جملات دنباله از جمله‌ی اول تا بی‌نهایت است.

✖ **تذکره** با داشتن جمله عمومی دنباله می‌توانیم جملات یک دنباله را بنویسیم.

📖 **مثال ۱)** چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی $u_n = \frac{n^2}{1+n^2}$ را بنویسید.

دنباله‌های مهم:

$$a_n = n \rightarrow 1, 2, 3, \dots, n$$

(۱) دنباله اعداد طبیعی:

$$a_n = 2n - 1 \rightarrow 1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$$

(۲) دنباله اعداد طبیعی فرد:

$$a_n = 2n \rightarrow 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

(۳) دنباله اعداد طبیعی زوج:

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

(۴) دنباله توافقی:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$$

(۵) دنباله تصاعد حسابی:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \rightarrow a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots, a_1 q^{n-1}, \dots$$

(۶) دنباله تصاعد هندسی:

(۷) دنباله فیبوناتچی:

تعریف: دنباله عددی $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ را در نظر بگیرید. این دنباله به دنباله فیبوناتچی معروف است که دو جمله اول آن برابر یک بوده و از جمله سوم به بعد هر جمله برابر مجموع دو جمله قبلی خودش می باشد.

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

□ تست ۲) اگر جمله نهم و دهم دنباله فیبوناتچی به ترتیب برابر ۳۴ و ۵۵ باشد جمله دوازدهم این دنباله را بیابید؟

۱۴۲ (۴)

۱۴۸ (۳)

۱۴۴ (۲)

۱۴۶ (۱)

۵۵ مجموع جملات فیبوناتچی:

مجموع n جمله اول دنباله فیبوناتچی از رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n = 2u_n + u_{n-1} - 1$$

□ تست ۳) جمله پانزدهم و شانزدهم دنباله فیبوناتچی به ترتیب ۶۱۰ و ۹۸۷ است. مجموع شانزدهم جمله نخست آن کدام است؟

۲۴۵۲ (۴)

۲۴۷۲ (۳)

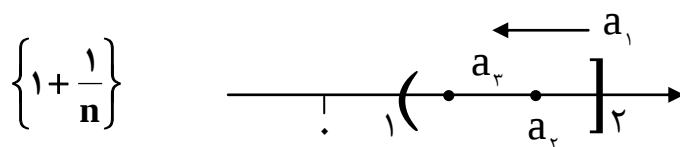
۲۵۴۳ (۲)

۲۵۸۳ (۱)

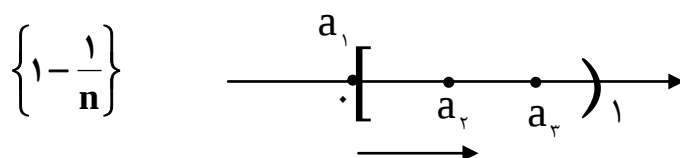
نمایش دنباله‌ها بر روی محور:

به کمک نمایش دنباله روی محور اعداد حقیقی می‌توانیم رفتار دنباله را آسان‌تر بررسی کنیم:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{4}{3}, \dots$$



جملات دنباله $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شوند.



جملات دنباله $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود.

□ تست ۴) جمله سوم دنباله $\cos\left(n! \frac{n}{12}\right)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (-۱) ۳ (صفر) ۴ ($\frac{1}{2}$)

□ تست ۵) چند جمله منفی دارد $\left\{\frac{2n-5}{3n-37}\right\}$ دنباله

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

(تمرین)

□ تست ۶) دنباله $a_n = \frac{2n-7}{5n-14}$ چند جمله منفی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی شمار

□ تست ۷) در دنباله درجه دوم ...، ۲۸، ۱۹، ۱۲، ۷، ۴ جمله پانزدهم کدام است؟ (میکرو گاج)

- ۲۲۸ (۱) ۲۱۹ (۲) ۲۰۴ (۳) ۱۹۸ (۴)

□ تست ۸) بزرگترین جمله دنباله $a_n = -n^2 + 2n + 11$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

□ تست ۹) رابطه‌ی $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است اگر $u_1 = u_2 = 1$

باشد، جمله‌ی نهم این دنباله کدام است؟

- ۳۵ (۱) ۳۴ (۲) ۳۳ (۳) ۳۲ (۴)

□ تست ۱۰) در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$

جمله هشتم این دنباله کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۵)

- ۱۲۷ (۱) ۱۵۹ (۲) ۲۴۷ (۳) ۲۵۵ (۴)

□ تست ۱۱) دنباله بازگشتی $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ با شرط $a_1 = -1$ را در نظر بگیرید. حاصل

ضرب صد جمله اول دنباله کدام است؟ (تمرین) (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

- ۲۰۱ (۱) -۱۹۹ (۲) -۱۹۷ (۳) ۱۹۷ (۴)

□ تست ۱۲) با توجه به الگوی مقابل، تعداد دایره ها در شکل دهم چند تا است؟ (آزمون گاج)

۱۱۹(۴)

۱۱۷(۳)

۱۲۳(۲)

۱۲۱(۱)



□ تست ۱۳) با توجه به الگوی مقابل، تعداد مربع های در شکل دهم چند تا است؟ (تمرین)

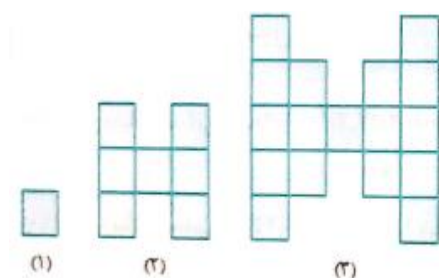
(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۱۹۹(۴)

۱۹۵(۳)

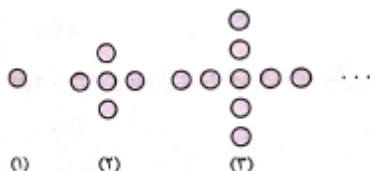
۱۹۱(۲)

۱۸۵(۱)



□ تست ۱۴) با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره ها در شکل چندم برابر ۲۹ است؟ (میکرو گاج)

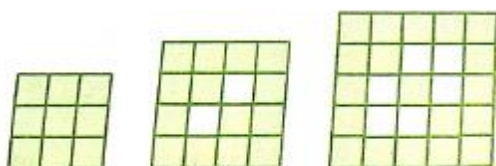
(۱) هفتم (۲) هشتم (۳) نهم (۴) دهم



□ تست ۱۵) با توجه به الگوی مقابل ، اختلاف تعداد مربع های رنگی و سفید در شکل یازدهم

کدام است؟ (تمرین) (میکرو گاج)

(۱) ۵۵ (۲) ۵۹ (۳) ۶۳ (۴) ۶۶



□ تست ۱۶) در الگوی زیر، تعداد نقطه ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

(۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۰



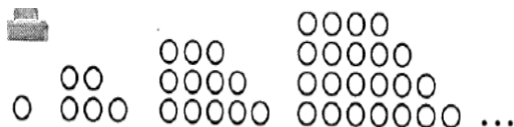
□ تست ۱۷) در الگوی زیر، تعداد نقطه ها، در شکل نهم، کدام است؟ (تمرین) (تجربی ۹۸)

۱۲۵(۴)

۱۲۳(۳)

۱۲۰(۲)

۱۱۷(۱)



□ تست ۱۸) مطابق الگوی زیر برای ساخت ۱۰۰ مثلث کوچک، چند چوب کبریت لازم است؟

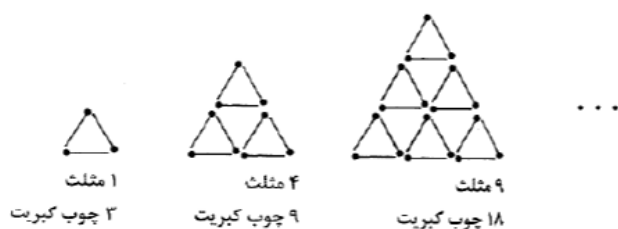
(گزینه دو ۱۴۰۰)

۴) با این الگو ۱۰۰ مثلث نمی توان ساخت

۳) ۲۰۰

۲) ۱۹۸

۱) ۱۶۵



پاسخ: گزینه ۱

نکته : مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از یک برابر است با :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مطابق الگویابی ، دنباله تعداد مثلث ها و تعداد چوب کبریت ها به صورت زیر است:

$$a_n = n^2 \Rightarrow \dots, 16, 9, 4, 1 : a_n \text{ : تعداد مثلث ها}$$

$1 \times 3 + 2$ و $1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3$ و $1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 3$ و b_n : تعداد چوب کبریت ها
....

$$\Rightarrow b_n = 3 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) \Rightarrow b_n = \frac{3n(n+1)}{2}$$

بنابراین اگر تعداد مثلث ها برابر ۱۰۰ باشد، داریم:

$$a_n = 100 \Rightarrow n^2 = 100 \Rightarrow n = 10 \Rightarrow b_{10} = 3 \times \frac{10 \times 11}{2} = 3 \times 55 = 165$$

□ تست ۱۹) مطابق الگوی زیر با تعدادی سکه، اشکالی را می سازیم. با در اختیار داشتن ۶۶ سکه، شکل مرحله چندم ساخته می شود؟
(گزینه دو ۱۴۰۰)

۱) دهیم ۲) یازدهیم ۳) دوازدهیم ۴) نهم

