

فصل پنجم

قدر مطلق

تعریف قدر مطلق و ویژگی‌های آن:

تعریفی از قدر مطلق:

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

نتایج این تعریف:

$$1) \max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

$$2) \min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

$$3) \max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a + b$$

$$4) \max\{a, b\} = -\min\{-a, -b\}$$

مثال 

$$1) \max\{x, 1-x\} = 1$$

$$\text{ق ق} \quad 1-x=1 \Rightarrow x=0 \quad \text{ق ق} \quad x=1: \text{حل}$$

$$2) \max\{x, |x|\} =$$

$$3) y = \max\{1, x\} =$$

$$4) y = \max\{f(x), -f(x)\}$$

تعریف دیگری از قدر مطلق:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

📖 مثال) با استفاده از تعریف جبری قدر مطلق حاصل عبارتهای زیر را بیابید؟

۵) $|2x - |x|| = 2 + x$

۶) $x|x| - 5|x| + 6$

۷) $|x - 1| + |x + 1| \leq 4$

تمرین:

$$۸) ۲x - |x - ۱| > ۸$$

$$۹) |۲x - ۳| < x$$

$$۱۰) x^r + |x| = ۰$$

$$۱۱) ۲|x| + |x - ۲| = ۳x - ۲$$

ویژگی های قدر مطلق

ویژگی اول:

$$1) \sqrt[n]{x^n} = |x| \geq 0 \quad |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \sqrt[n-1]{x^{n-1}} = x$$

مثال

$$12) |2x - 3| < 1 \quad A = \sqrt{(x+2) - 2\sqrt{x+2}} + \sqrt{(x+2) + 2\sqrt{x+2}}$$

$$13) b < 0 < a \quad A = |a - b| + |a + 1| - |b - 1|$$

□ تست ۱۴) اگر $x < y < 0$ و $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} - |x - y| + \frac{y}{\sqrt{y^2}} - \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 8$ باشد،

(میکرو گاج)

مقدار y کدام است؟

-۴(۴)

-۳(۳)

-۲(۲)

-۱(۱)

ویژگی دوم:

$$۲) |b-a| = |a-b|, \quad |-x| = |x|$$

$$|x^n| = |x|^n \quad |x^r| = |x|^r = x^r$$

مثال

$$۱۵) A = \frac{|1-x|}{\sqrt{x^2-2x+1}}$$

ویژگی سوم:

$$۳) |x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$$

$$x^n = a^n \Rightarrow |x| = |a| \Rightarrow x = \pm a$$

$$x^{n-1} = a^{n-1} \Rightarrow x = a \quad |u| = |v| \Rightarrow u = \pm v$$

مثال

$$۱۶) ||x-2|-5| = 3$$

$$۱۷) (x-1)^2 - 5|x-1| + 4 = 0$$

$$۱۸) |4x^2 + 2x| = 2x|x+3| \quad x \geq 0$$

تمرین:

$$۱۹) |x^2 - 2x - 1| = |x^2 - 2x + 3|$$

ویژگی چهارم:

$$۴) |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad , \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$$

$$|x \pm y| \neq |x| \pm |y|$$

ویژگی پنجم:

$$5) |x| \geq x \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq x & x \in \mathbb{R} \\ |x| = x & x \in [0, +\infty) \\ |x| > x & x \in (-\infty, 0) \\ |x| < x & x \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$$

مثال

$$20) x\sqrt{5} = -\sqrt{5}x^2$$

$$21) 5^{(x+x-2)} = 25$$

تمرین:

$$22) \left| \frac{x-2}{x-3} \right| = \frac{2-x}{x-3}$$

$$23) y = \frac{1}{\sqrt{|x|+x}}$$

ویژگی ششم:

$$6) |x| < a \xrightarrow{a>0} -a < x < a$$

$$x^{2n-1} \leq a^{2n-1} \Rightarrow x \leq a$$

$$|u| \leq |v| \Rightarrow u^2 \leq v^2$$

مثال 

$$24) |x^2| < x^2$$

$$25) ||x-2|-2| \leq 4$$

$$26) |x^2-1| < x^2+x+1$$

$$27) f(x) = \sqrt{f(|x-2|)-f(|2x-1|)}$$

نزولی اکید در IR

$$28) |x-1| < 0.1$$

$$A < 2x-3 < B$$

$$A+B=?$$

□ تست ۲۹) اگر دو محدوده $a < 2x+1 < b$, $|2x-4| < 3$ با هم معادل باشند، $a+b$ کدام است؟
(برگرفته از کتاب درسی)

$$10(4)$$

$$8(3)$$

$$6(2)$$

$$4(1)$$

تمرین:

$$30) |x-2| < \sqrt{2x-1}$$

$$31) ||x|-2| < ||x|-4|$$

ویژگی هفتم:

$$۷) |x| > a \xrightarrow{a>0} x > a \text{ یا } x < -a$$

$$x^{r(n-1)} \geq a^{r(n-1)} \Rightarrow x \geq a, \quad |u| \geq |v| \Rightarrow u^r \geq v^r$$

مثال 

$$۳۲) |x-۲| \geq \sqrt{x}$$

$$۳۳) f(x) = \sqrt{x^2 - ۲|x| - ۳}$$

$$۳۴) \left| \frac{۲x-۱}{x+۱} \right| > ۱$$

تمرین:

$$۳۵) ||x|-۱| \geq \sqrt{x^2-۱}$$

ویژگی هشتم:

$$۸) ۰ < a \leq |x| < b \Rightarrow a \leq x < b \quad \text{یا} \quad -b < x \leq -a$$

$$a, b > ۰ \Rightarrow a^r \leq x^r \leq b^r \Rightarrow ۰ < a \leq |x| \leq b$$

$$\Rightarrow -b \leq x \leq -a \quad \text{یا} \quad a \leq x \leq b$$

مثال 

$$۳۶) |x^r - ۶| \leq ۴$$

$$۳۷) |x^r - ۴| < ۲x^r + ۴$$

تمرین:

$$۳۸) x^r - ۵|x| < -۶$$

ویژگی نهم:

$$۹) \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y| \Rightarrow \begin{cases} xy \geq ۰ \Leftrightarrow |x+y| = |x| + |y| \\ xy < ۰ \Leftrightarrow |x+y| < |x| + |y| \end{cases}$$

مثال 

$$۳۹) ۲|x| + |x-۲| = |۳x-۲|$$

$$۴۰) |۲x| = |x-۲| + |۳x-۲|$$

$$۴۱) |a^2 - b| = a^2 + |b| \Rightarrow b \text{ چگونه است؟}$$

□ تست ۴۲) اگر $f(x) = ۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (۱۹ گاج)

$$(۱) [-۱, ۱] \quad (۲) (-\infty, ۰) \quad (۳) (-\infty, +\infty) \quad (۴) (۰, +\infty)$$

تست ۴۳) نمودار تابع $y = f(x - 2)$ به صورت مقابل است، دامنه تابع $y = 2f(1 - x)$ کدام

است؟

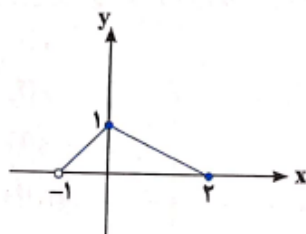
(۱۹ گاج)

(۴) $(1, 4)$

(۳) $[1, 4]$

(۲) $(-4, 1)$

(۱) $[-4, -1]$

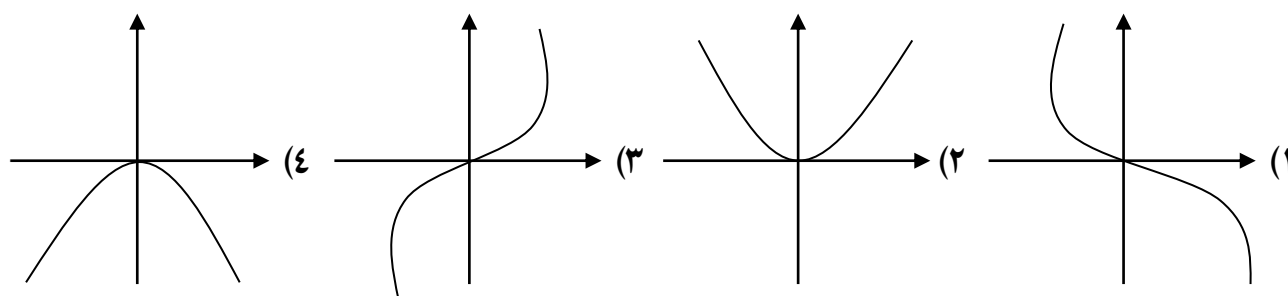


نمودارهای قدر مطلق:

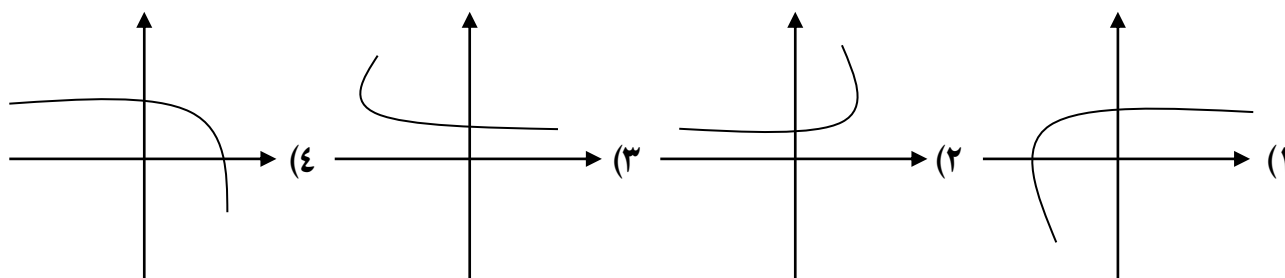
رسم توابع شامل قدر مطلق:

روش کلی برای رسم توابع شامل قدر مطلق این است که ابتدا هریک از عبارات داخل قدر مطلق را تعیین علامت کنید و سپس دامنه‌ی تابع را چنان افراز کنید که در هر بازه معلوم باشد که علامت هریک از عبارات داخل قدر مطلق‌ها چیست سپس می‌توانید در هر بازه، قدر مطلق‌ها را بردارید و سپس نمودار تابع حاصل را در بازه متناظر رسم کنید.

تست ۴۴) نمودار تابع $y = -x|x|$ شبیه کدام است؟



□ تست ۴۵) نمایش هندسی تابع $y = x|x| - x^2 + 1$ شبیه کدام است؟



📌 نکته: برای پیدا کردن کمترین مقدار عبارت $f(x) = |a_1x + b_1| + \dots + |a_nx + b_n|$ کافی است ریشه‌های عبارات داخل قدر مطلق‌ها را بیابید و سپس مقدار تابع f را به ازای این ریشه‌ها تعیین کنید، کوچکترین عدد در بین اعداد به دست آمده، همان کمترین مقدار تابع f است.

$$\min f = \min \left\{ f\left(-\frac{b_1}{a_1}\right), \dots, f\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \right\} \text{ یعنی:}$$

□ تست ۴۶) کمترین مقدار عبارت $|2x - 4| + |x - 1| + |x + 3|$ کدام است؟

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۴ (۲)

۶ (۱)

انتقال و قرینه‌یابی در نمودارها:

فرض کنید نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم در این صورت برای:

(۱) رسم $y = f(x) + b$: کافی است نمودار f را به اندازه b انتقال دهیم یعنی اگر $b > 0$ نمودار را به اندازه‌ی b واحد به بالا و اگر $b < 0$ نمودار را به اندازه‌ی $|b|$ به پایین انتقال می‌دهیم.

(۲) رسم $y = f(x + a)$: کافی است نمودار f را به اندازه‌ی $-a$ انتقال دهیم یعنی اگر $a > 0$ نمودار را به اندازه‌ی a واحد به طرف چپ و اگر $a < 0$ نمودار را به اندازه‌ی $|a|$ واحد به طرف راست انتقال می‌دهیم.

(۳) رسم $y = -f(x)$: کافی است نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

(۴) رسم $y = f(-x)$: کافی است نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

(۵) رسم $y = kf(x)$: عرض هر نقطه را در k ضرب می‌کنیم در این صورت اگر $|k| > 1$ نمودار f در امتداد محور y ها کشیده می‌شود و اگر $|k| < 1$ نمودار f در امتداد محور y ها فشرده می‌شود.

(۶) رسم $y = f(kx)$: طول هر نقطه را بر k تقسیم می‌کنیم در این صورت اگر $|k| > 1$ نمودار f در امتداد محور x ها فشرده می‌شود و اگر $|k| < 1$ نمودار f در امتداد محور x ها کشیده می‌شود.

(۷) رسم $y = |f(x)|$: شاخه‌ای از نمودار f را که زیر محور x هاست حذف و آن را به بالا قرینه می‌کنیم.

۸) رسم $y = f(|x|)$: شاخه‌ای از نمودار f را که سمت چپ محور y هاست حذف و شاخه سمت راست را (بدون حذف کردن) به چپ قرینه می‌کنیم.

۹) رسم $|y| = f(x)$: شاخه‌ای از نمودار f را که زیر محور x هاست حذف و شاخه بالایی را (بدون حذف کردن) به پایین قرینه می‌کنیم.

□ تست ۴۷) با انتقال نمودار $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ به نمودار $g(x) = 2 + \sqrt{x+1}$ رسیده ایم. مراحل انتقال به ترتیب کدام است؟
(نردبام خیلی سبز)

- ۱) دو واحد به چپ و یک واحد به بالا ۲) دو واحد به راست و یک واحد به بالا
۳) دو واحد به چپ و یک واحد به پایین ۴) دو واحد به راست و یک واحد به پایین

□ تست ۴۸) نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی، سپس ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور x ها است؟
(ریاضی خارج ۹۸)

- (۱) $(-5, 2)$ (۲) $(-5, 3)$ (۳) $(-2, 3)$ (۴) $(-2, 5)$

□ تست ۴۹) اگر نمودار تابع $f(x) = 3x^2 + 1$ را دو واحد به سمت راست و یک واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x-1)$ به دست می آید. مقدار $g(3)$ کدام است؟

(آزمون های گاج)

۱۴(۴

۱۳(۳

۱۲(۲

۱۰(۱

□ تست ۵۰) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در

جهت منفی انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ

(تجربی ۱۴۰۱)

مختصات کدام است؟

$\sqrt{10}$ (۴

$2\sqrt{5}$ (۳

۲(۲

۱(۱

□ تست ۵۱) در بازه (a, b) نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است.

(تجربی ۹۷)

طول نقطه ی وسط این بازه کدام است؟

-0.5 (۴

-1 (۳

-1.5 (۲

-2 (۱

□ تست ۵۲ در بازه (a, b) نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y=2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (تجربی ۹۹)

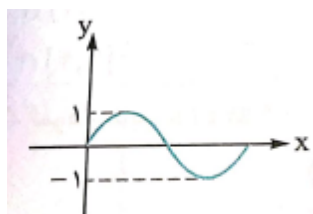
۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

□ تست ۵۳ در بازه (a, b) نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (تمرین) (تجربی خارج ۹۹)

۱(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲(۳) $\frac{5}{2}$ (۴)

□ تست ۵۴ اگر نمودار تابع $Y=F(x)$ به صورت زیر باشد، برد تابع $y = 1 + 3f\left(\frac{x}{2}\right)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزشی ۹۶)

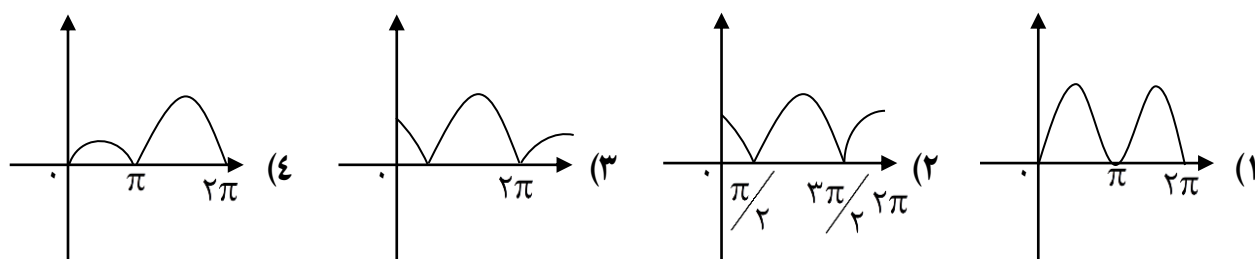
۱(۱) $[-2, 2]$ ۲(۲) $[2, 4]$ ۳(۳) $[-2, 0]$ ۴(۴) $[-2, 4]$



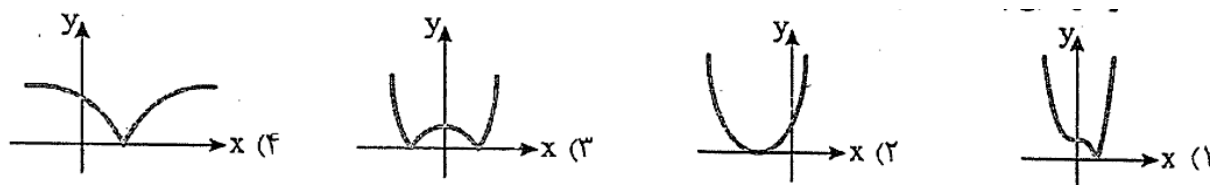
□ تست ۵۵) بُرد تابع $f(x) = x^2 - 2x + 1$ کدام است؟ (میکروگاج)

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 11]$ (۳) $[-11, 1]$ (۴) $\mathbb{R}$

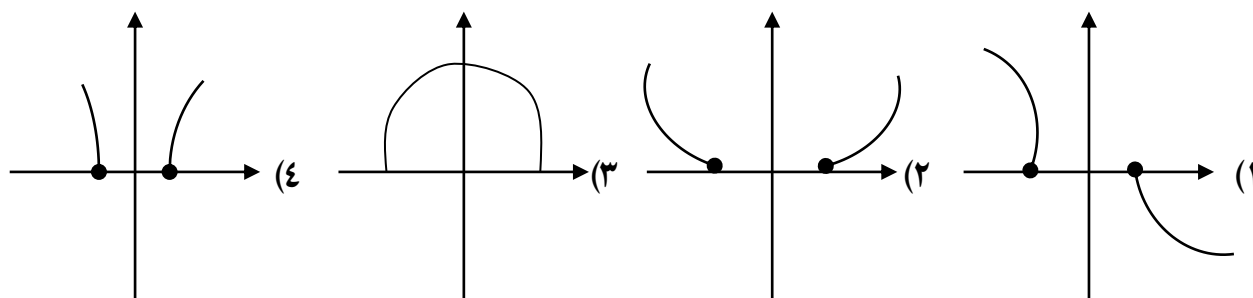
□ تست ۵۶) منحنی نمایش تابع $y = |\cos x|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



□ تست ۵۷) نمودار تابع $f(x) = |x^3 - 1|$ کدام است؟ (موج آزمون الگو)



□ تست ۵۸) نمودار تابع $y = \sqrt{|x|} - 1$ به کدام شبیه است؟



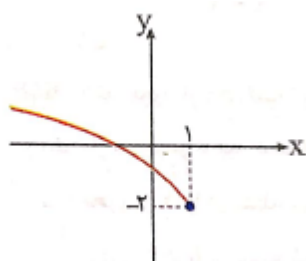
□ تست ۵۹) نمودار تابع $f(x) = a + \sqrt{-x + b}$ به صورت مقابل است. مقدار $a \times b$ کدام است؟
(میکرو گاج)

۱(۴)

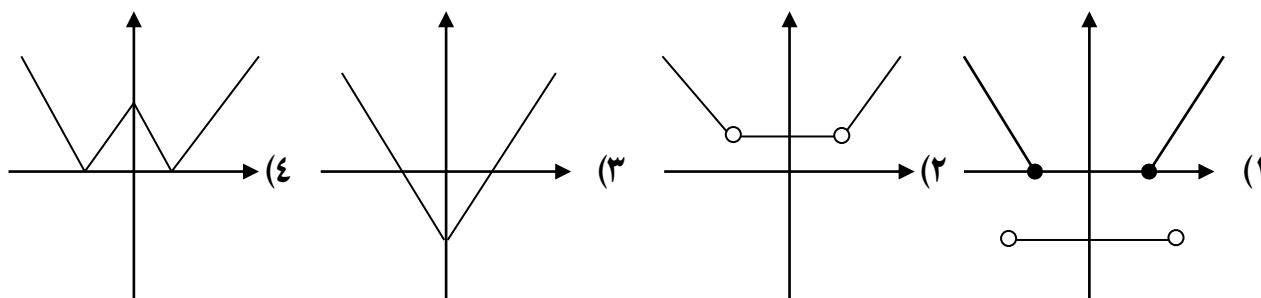
۲(۳)

-۱(۲)

-۲(۱)



□ تست ۶۰) منحنی نمایش $f(x) = ||x| - 2|$ کدام است؟

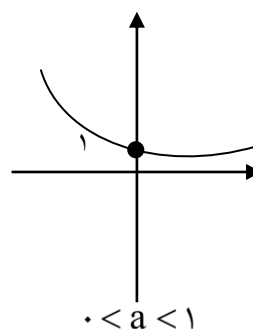
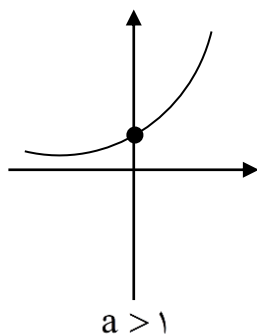


□ تست ۶۱ x عضوی از کدام یک از مجموعه های زیر باشد تا نمودار تابع $f(x) = x|x|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = x^3$ باشد؟ (تمرین)

(گزینه دو ۱۴۰۰)

- (۱) $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ (۲) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
(۳) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (۴) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

📌 نکته نمودار تابع $y = a^x$ به یکی از دو شکل مقابل است:



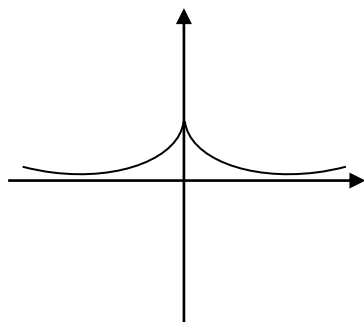
□ تست ۶۲ شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟

(۲) $y = 2^{-|x|}$

(۱) $y = |2^x|$

(۴) $y = |2^{-x}|$

(۳) $y = 2^{|x|}$



□ تست ۶۳ تابع $y = 2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم. منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول، قطع می کند؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

$$\frac{7}{2}(4)$$

$$\frac{5}{2}(3)$$

$$-\frac{3}{2}(2)$$

$$-\frac{5}{2}(1)$$

□ تست ۶۴ نمودار تابع $y = 2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{4}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[0, \pi]$ ، کدام است. (تمرین) (تجربی ۱۴۰۰)

$$4(4)$$

$$2(3)$$

$$1(2)$$

$$0(1)$$

□ تست ۶۵) نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک

واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام

طول متقاطع اند:

(سراسری تجربی ۹۳)

- (۱) $-3/5$ (۲) -3 (۳) $-2/5$ (۴) -2

□ تست ۶۶) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت

مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می دهیم، فاصله نقطه بر

خورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

- (۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$ (۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

□ تست ۶۷) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$; ($x > 1$) مفروض است. قرینه ی

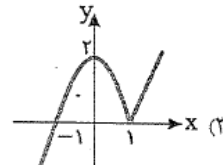
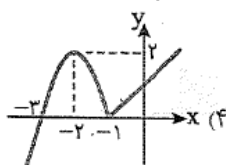
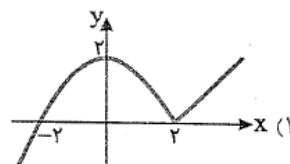
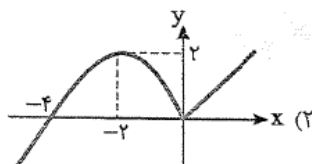
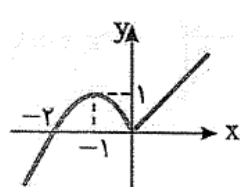
نمودار آن نسبت به محور x ها را ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می

دهیم. فاصله ی نقطه ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

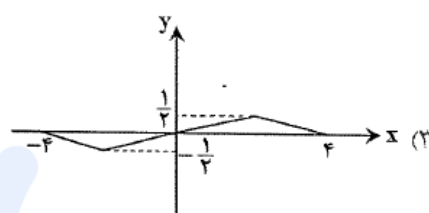
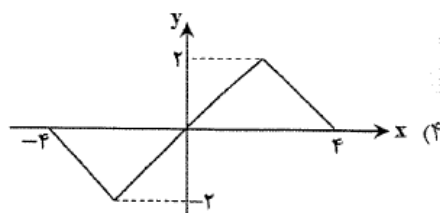
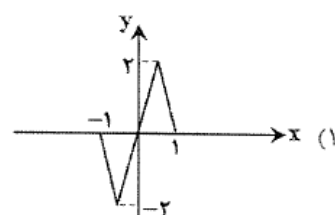
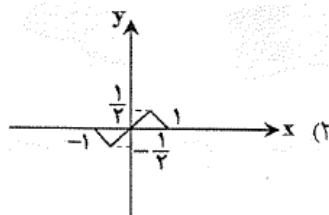
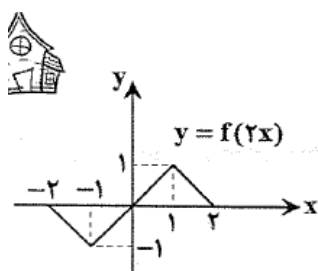
(تجربی خارج ۹۹) (تمرین)

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$

□ تست ۶۸ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 2f(x - 1)$ کدام است؟
(موج آزمون الگو)



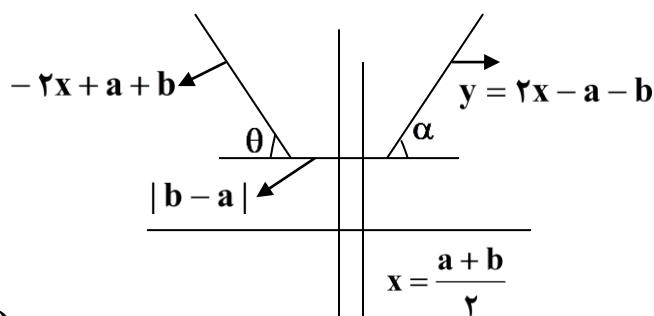
□ تست ۶۹ نمودار تابع $y = f(2x)$ در شکل زیر رسم شده است. کدام گزینه نمودار تابع $y = 2f(x)$ را به درستی نمایش می دهد؟ (تمرین)
(گزینه دو ۹۹)



۸۵ چگونگی رسم نمودار تابع $y = f(x) = |x - a| + |x - b|$ (نمودار گلدانی)

$$y = f(x) = |x - a| + |x - b|$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a - b & x > b \\ |b - a| & a \leq x \leq b \\ -2x + a + b & x < a \end{cases}$$



۱) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [|b - a|, +\infty)$

۲) $x = \frac{a+b}{2}$ و محور تقارن $a = -b$ $f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ زوج

۳) $\alpha = \text{Arc tg } 2$ $\theta = -\text{Arc tg } 2$ f غیر یکنوا

۴) $|x - a| + |x - b| = c$

الف) $|b - a| > c \Rightarrow x \in \emptyset$ معادله فوق جواب ندارد

ب) $|b - a| = c$ $x \in [a, b]$ معادله فوق بی شمار جواب دارد

ج) $|b - a| < c \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a+b-c}{2} \\ x_2 = \frac{a+b+c}{2} \end{cases}$

معادله ۲ جواب دارد

۵) $|x - a| + |x - b| \leq c$

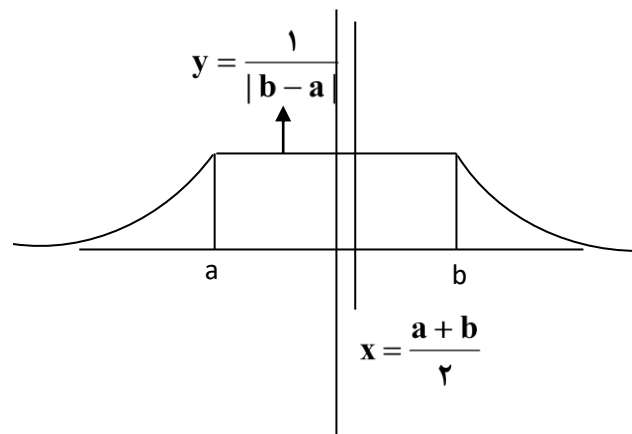
الف) $|b - a| < c \Rightarrow x \in [x_1, x_2]$ نامعادله ۲ جواب دارد

ب) $|b - a| = c$ $x \in [a, b]$ نامعادله بی شمار جواب دارد

ج) $|b - a| > c$ $x \in \emptyset$

۶) $y = \frac{1}{|x - a| + |x - b|}$

الف) $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = (0, \frac{1}{|b - a|}]$



زوج $f(-x) = f(x)$ $a = -b$ محور تقارن $x = \frac{a+b}{2}$ ب)

مجانِب افقی $y = 0$ f غیر یکنوا ج)

مثال 

۷۰) $|x| + |x+2| = 2$

۷۱) $|x-2| + |4-x| = 3$

۷۲) $y = |2x+1| + |2x+k|$ محور تقارن $x = -2 \Rightarrow k = ?$

□ تست ۷۳) اگر خط $x = 5$ محور تقارن منحنی $|x-a| + |x-3|$ باشد مقدار a کدام است؟

$$f(x) = \frac{1}{|x+2|+|x+3|} \quad R_f =$$

□ تست ۷۵ تابع $f(x) = |x| + |x-1|$ در کدام فاصله صعودی است؟

- (۱) $(-\infty, 1]$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $[-1, 2]$ (۴) $(-\infty, 0]$

□ تست ۷۶ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{56}{|x-2|+|x-k|}$ برابر ۸ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای k چند است؟ (تمرین)

(۱۹ گاج)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

□ تست ۷۷ حداکثر مقدار عبارت $\frac{15}{|x-1|+|x-4|}$ کدام است؟ (موج آزمون)

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۳

□ تست ۷۸ در بازه ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(تجربی داخل ۹۷)

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(فاقد نقطه مشترک)

نمودار ضابطه‌ی $|x - a| + |y - b| = c > 0$ مربعی است با ویژگی‌های زیر:

$$|x - a| + |y - b| = c > 0$$

$d = 2c$ طول قطرها و موازی محورهای مختصات $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$

$$P = 4\sqrt{2}c \quad S = 2c^2 = \text{مساحت مربع}$$

$$x \in [a - c, a + c] \quad |x - a| \leq c \quad \text{حدود تغییرات } x$$

$$y \in [b - c, b + c] \quad |y - b| \leq c \quad \text{حدود تغییرات } y$$

📖 مثال

$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow \text{محور تقارن؟} \quad (۷۹)$$

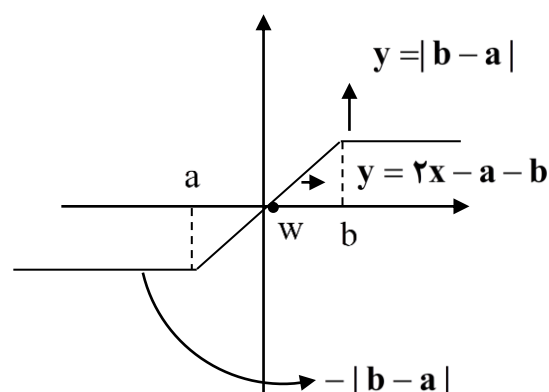
$$P = ? \quad |x - 2| + |y - 3| = 4 \quad (۸۰)$$

$$۸۱) |x-a| + |x-b| = \frac{m^2}{2\sqrt{2}} \quad S=۴ \quad \Rightarrow m=?$$

$$۸۲) |x-۱| + |2y-۱| = ۵ \quad \text{حدود تغییرات } y$$

نمودار تابع $y = |x-a| - |x-b|$ و ویژگی‌های آن به شرح زیر است:

$$y=f(x) = \begin{cases} |b-a| & x > b \\ 2x-a-b & a \leq x \leq b \\ -|b-a| & x < a \end{cases}$$



$$۱) D_f = \mathbb{R} \quad R_f = [-|b-a|, |b-a|]$$

$$۲) w = \frac{a+b}{2} \quad \text{مرکز تقارن}$$

$$۳) a+b=۰ \quad \Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \text{f فرد}$$

$$۴) \begin{cases} a < b & f \text{ صعودی اکید} \\ a > b & f \text{ نزولی اکید} \end{cases}$$

ه) $|x-a| - |x-b| = c$

الف) $|c| > |b-a| \quad x \in \emptyset$

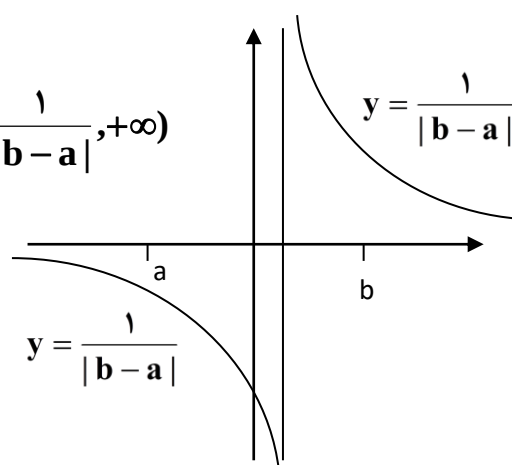
ب) $\begin{cases} c = |b-a| & x \in [b, +\infty) \\ c = -|b-a| & x \in (-\infty, a] \end{cases}$

ج) $|c| < |b-a| \Rightarrow \begin{cases} a < b \Rightarrow x_l = \frac{a+b-c}{2} \\ a > b \Rightarrow x_r = \frac{a+b+c}{2} \end{cases}$

گ) $y = \frac{1}{|x-a| - |x-b|}$

الف) $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a+b}{2} \right\} \quad R_f = (-\infty, -\frac{1}{|b-a|}] \cup [\frac{1}{|b-a|}, +\infty)$

ب) $x = \frac{a+b}{2}$ مجانب قائم



مثال

۸۳) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + 4 \quad R_f = ?$

□ تست ۸۴) اگر معادله فقط یک جواب داشته باشد حدود a کدام است؟

$$f(x) = |x - a| - |x - 2| = 4$$

□ تست ۸۵) اگر خط $2x + 3y + m - 6 = 0$ از مرکز تقارن تابع $y = |x - 2m| - |x + 3|$

بگذرد، مقدار m کدام است؟

□ تست ۸۶) تابع $f(x) = |x| - |x - 3|$ در بازه $(a, b) - \mathbb{R}$ ثابت است. حداکثر مقدار

(خیلی سبز)

$b - a$ کدام است؟ (تمرین)

۴(۴

۳(۳

۲(۲

۱(۱

۸۷ معادلات قدر مطلق

* برای حل معادلات قدر مطلق، معمولاً عبارات داخل قدر مطلق ها را تعیین علامت کنیم و

سپس با ساده کردن معادله، ریشه های قابل قبول آن را بدست می آوریم.

✎ تذکر) برای حل یک معادله قدر مطلق می توانید از این ویژگی قدرمطلق استفاده کنید:

$$|u| = k \Leftrightarrow u = \pm k \quad (k > 0)$$

□ تست ۸۷) معادله $|x - 3| = \frac{x}{2}$ دارای چند جواب است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ بی شمار ۴ صفر

□ تست ۸۸) مجموعه ی جواب معادله $|4x - 5| = 2x + 3$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\left\{4, -\frac{1}{3}\right\}$ ۲ (۲) $\left\{-4, \frac{1}{3}\right\}$ ۳ (۳) $\left\{4, \frac{1}{3}\right\}$ ۴ (۴) $\left\{-4, -\frac{1}{3}\right\}$

□ تست ۸۹) مجموع جواب های معادله $x^2 - 2x - |x - 1| - 1 = 0$ کدام است؟ (تمرین)

(موج آزمون)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

□ تست ۹۰) معادله $|x - |x|| = 1$ دارای:

- (۱) ریشه نیست
(۲) ریشه مضاعف است
(۳) یک ریشه مثبت است
(۴) یک ریشه منفی است

□ تست ۹۱) مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - 5|x - 1| + 4 = 0$ برابر است با:

- (۱) ۱۰ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) صفر

□ تست ۹۲) معادله $|x^2 - 1| + |x^2 - 1| + |x - 1| = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) جواب ندارد

□ تست ۹۳) جواب های معادله $|x| + |x + 1| = 2x + 1$ در کدام محدوده قرار دارند؟

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

$$x < -1 \quad (1) \quad -1 \leq x < 0 \quad (2) \quad x > 0 \quad (3) \quad x \geq 0 \quad (4)$$

□ تست ۹۴) در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x+1| & ; x > 0 \\ 3 & ; x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $f(f(f(-f(x))))$ کدام است؟

(IQ گاج)

$$3x+3 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad x+1 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۸۸ نامعادلات قدر مطلق

برای حل نامعادلات قدر مطلق ابتدا عبارات داخل قدر مطلق ها را تعیین علامت کرده سپس نامعادله را ساده کرده تا مجموعه جواب قابل قبول برای نامعادله بدست آید و در پایان بین مجموعه جواب های به دست آمده اجتماع می گیریم.

✎ تذکر: برای حل یک نامعادله قدرمطلق، می توانید از این ویژگی های قدرمطلق استفاده کنید که:

$$|u| \leq k \Rightarrow -k \leq u \leq k, \quad |u| \geq k \Rightarrow \begin{cases} u \geq k \\ u \leq -k \end{cases}$$

□ تست ۹۵) مجموعه جواب نامعادله $|2x + 5| < 3$ کدام بازه است؟

- (۱) $(-4, -1)$ (۲) $(-3, 1)$ (۳) $(-3, -2)$ (۴) $(-5, -1)$

□ تست ۹۶) نامعادله $|x| < 3 - 2x$ معادل کدام نامعادله است؟

- (۱) $|x - 2| < 1$ (۲) $|x - 1| < 2$ (۳) $|x - 2| < 1$ (۴) $|x - 1| < 1$

□ تست ۹۷) مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ 2x - 1 < |x| \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\{x: -1 < x, 1\}$ (۲) $\{x: -2 < x < 2\}$ (۳) $\{x: 0 < x < 2\}$ (۴) $\{x: -2 < x < 1\}$

□ تست ۹۸) مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$ به صورت کدام بازه است؟ (تمرین)

(تجربی خارج ۹۵)

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(-2, -1)$ (۴) $(2, 1)$

□ تست ۹۹) مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = 2 - |x|$; $y = x + |x|$

(سراسری تجربی ۹۵)

کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) ۳

□ تست ۱۰۰) مساحت ناحیه محدود به نمودار توابع $f(x) = |x + ۱|$, $g(x) = f(x - ۳)$ و محور x ها چند برابر $\frac{۱}{۴}$ است؟
(برگرفته از کتاب درسی)

۴(۴

۶(۳

۹(۲

۱۲(۱

□ تست ۱۰۱) مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟ (تمرین)
(ریاضی ۹۹)

۱۲(۴

۱۰(۳

۹(۲

۸(۱