

فصل چهارم

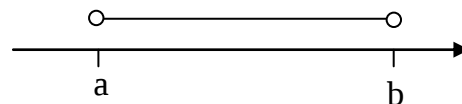
توابع

بازه‌ها

تعریف: اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد داریم:

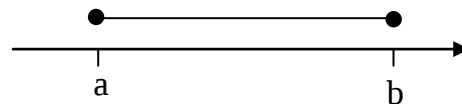
- (۱) مجموعه‌ی همه اعداد حقیقی بزرگتر از a و کوچکتر از b را بازه‌ی باز a و b می‌نامند و آن را به صورت روبرو نمایش می‌دهند:

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$



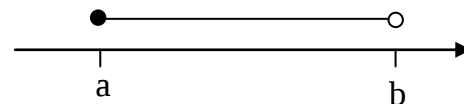
- (۲) اجتماع بازه باز (a, b) و دو نقطه a و b را بازه‌ی بسته a و b می‌نامند و آن را به صورت روبرو نمایش می‌دهند.

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$



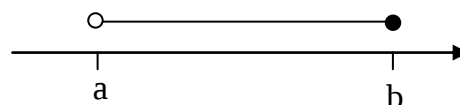
- (۳) بازه‌ی نیم باز از راست (نیم بسته از چپ) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

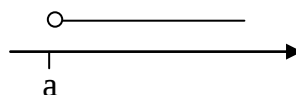


به همین ترتیب بازه‌ی نیم باز از چپ

$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

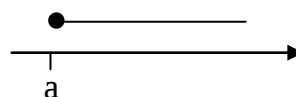


$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$$



(۴) بازه‌ی باز a و $+\infty$

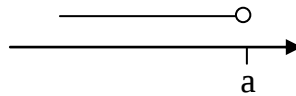
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$



(۵) بازه‌ی نیم باز a و $+\infty$

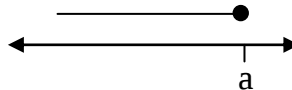
۶ بازه‌ی باز $a, -\infty$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$$



۷ بازه‌ی نیم باز a و $-\infty$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$



۸ مجموعه تمام اعداد حقیقی: $(-\infty, +\infty)$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid \forall x \in \mathbb{R}\}$$

رابطه: یک رابطه مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است.

♦ تساوی دو زوج مرتب: دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) را مساوی گویند

هرگاه $a = c$ و $b = d$ باشد.

♦ تابع به عنوان زوج مرتب: اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده

باشد هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، دارای

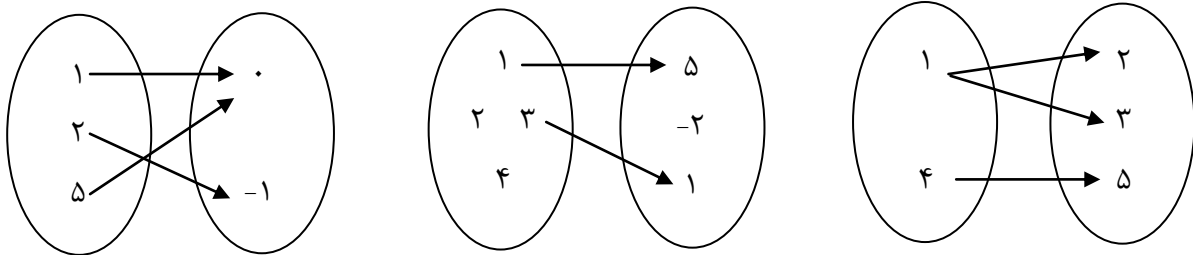
مؤلفه‌های اول برابر نباشند.

📖 مثال ۱) مجموعه‌ی $\{(2, 3), (3, 4), (5, 8), (2, 3)\}$ تابع است.

📖 مثال ۲) مجموعه‌ی $\{(2, 3), (3, 4), (5, 8), (2, 9)\}$ تابع نیست.

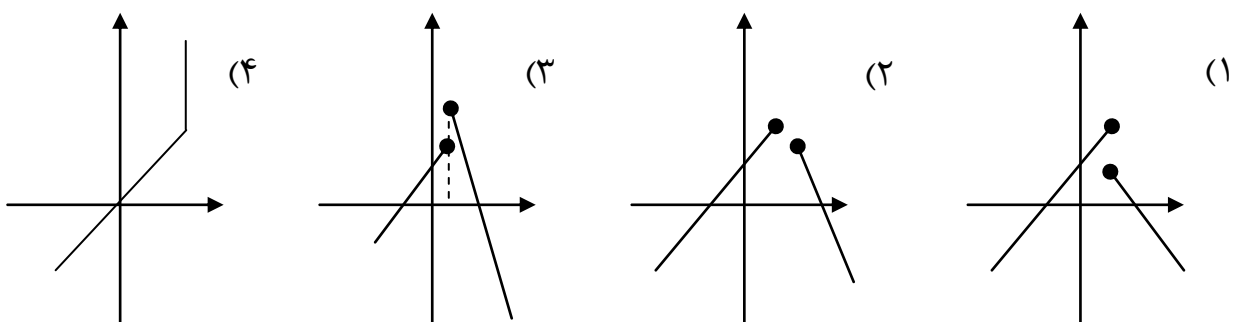
۱۸ تشخیص تابع:

(۱) تشخیص تابع از روی نمودار وِن: یک رابطه بین مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی B که با نمودار وِن نمایش داده می‌شود، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A ، دقیقاً یک پیکان خارج شود.



(۲) تشخیص تابع از روی نمودار مختصاتی: اگر هر خط موازی با محور y ها، نمودار یک رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن رابطه یک تابع است.

□ تست ۳) کدام یک از شکل‌های زیر نمودار تابع را نشان می‌دهد:



تعیین تابع از روی ضابطه:

در ضابطه تابع به ازای هر x باید حداکثر یک مقدار برای y وجود داشته باشد.

نکته: معمولاً روابطی که در آنها y شامل توان زوج و یا قدر مطلق می باشد تابع نیستند.

توضیح: اگر در رابطه ای، y شامل توان زوج و یا قدر مطلق نباشد آن رابطه حتماً تابع است. به

عنوان مثال رابطه ای $x^2 + yx^2 - y^2 = 8$ تابع است ولی اگر در رابطه ای y شامل توان زوج و

یا قدر مطلق باشد باید رابطه را بررسی کنیم:

مثال ۴

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2} \\ x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \text{مجموع دو عدد نامنفی برابر صفر} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow F = \{(0,0)\} \Rightarrow \text{تابع} \end{cases}$$

(گاج ۹۹)

تست ۵ کدام یک از توابع زیر چند جمله ای نیست؟

$$g(x) = \sqrt{2x}(x+1)^2 - x^2(2)$$

$$f(x) = \sqrt{2x}(x-1)^2 - x(1)$$

$$k(x) = \sqrt{\pi} - (\sqrt{2x} - 1)^2(4)$$

$$h(x) = \frac{4x^2 + 8x}{x} + 1(3)$$

تست ۶ کدام رابطه یک تابع است؟

$$y^2 - 3y^2 + x = 4(4)$$

$$y^2 + x = 1(3)$$

$$xy^2 + x = 1(2)$$

$$|y| = x(1)$$

□ تست ۷) تابع سود یک کارگاه تولیدی برابر $y = -400 + 80x$ است، که x تعداد کالای تولیدی و y سود بر حسب دلار است. با تولید چندمین کالا، سود دهی آغاز می شود؟ (کتاب درسی)

۷(۴

۴(۳

۶(۲

۵(۱

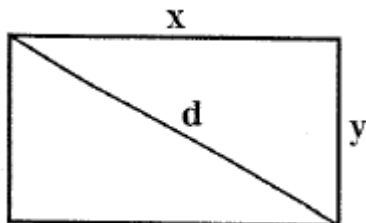
□ تست ۸) محیط مستطیل زیر برابر ۱۲ است. در کدام گزینه قطر مستطیل به عنوان تابعی از طول آن (x) نوشته شده است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$$d = \sqrt{x^2 - 12x + 36} \quad (۲)$$

$$d = \sqrt{2x^2 + 12x + 36} \quad (۱)$$

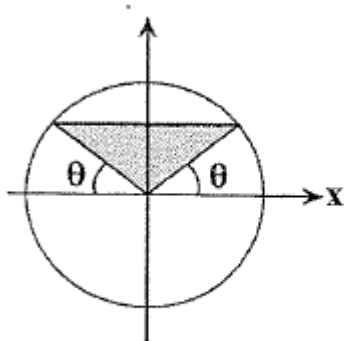
$$d = \sqrt{-2x^2 + 12x - 36} \quad (۴)$$

$$d = \sqrt{2x^2 - 12x + 36} \quad (۳)$$



□ تست ۹) در دایره مثلثاتی مقابل، مساحت مثلث رنگی برابر کدام گزینه است؟ (قلم چی ۹۹)

(۱) $\frac{1}{2} \cos^2 \theta$ (۲) $\frac{1}{2} \sin^2 \theta$ (۳) $\sin^2 \theta$ (۴) $\cos^2 \theta$ (تمرین)



تعریف دامنه: فرض کنیم $F: A \rightarrow B$ مجموعه $\{x \mid x \in A, (x, y) \in f\}$ را دامنه f نامیده و با D_f نمایش می‌دهیم.

روش‌های یافتن دامنه‌ی توابع مجموعه‌های حقیقی:

(۱) توابع چند جمله‌ای: دامنه‌ی تابع برابر مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$* f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + x \quad D_f = \mathbb{R}$$

(۲) دامنه‌ی توابع گویا:

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \text{ دو چند جمله‌ای اند } g(x), h(x)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\}$$

📖 مثال) دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

$$۱۰) f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x^2 - 3x^2)(x^2 + 1)}$$

$$۱۱) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1}$$

$$۱۲) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{|x| - 1}{|x| + 1}$$

$$۱۳) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x^2 + 4x - 2}$$

$$۱۴) f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x^2 - 4| - 2}$$

۳) توابع رادیکالی با فرجه فرد:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g$$

یعنی رادیکال در تعیین دامنه نقشی ندارد.

📖 مثال) دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

$$۱۵) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$$

$$۱۶) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[5]{|x^2 - 3| - 1}}$$

$$۱۷) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3}}{\sqrt{x} - 2}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$$

۴) توابع رادیکالی با فرجه زوج:

📖 مثال) دامنه‌ی توابع زیر را بیابید؟

$$۱۸) f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$۱۹) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

$$۲۰) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$۲۱) f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{[x]-3}$$

□ تست ۲۲) دامنه ی تابع $y = \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{4}} + \sqrt{2x - x^2}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

(۱) $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ (۲) $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ و $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ (۳) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

پاسخ: گزینه ۴

رادیكال دوم، فرجه ای ۳ است. پس در دامنه هیچ تاثیری ندارد. یعنی فقط باید $\frac{2}{x^2} - \frac{9}{4} \geq 0$ باشد، پس داریم.

$$\frac{2}{x^2} \geq \frac{9}{4} \Rightarrow 4 \geq 9x^2 \Rightarrow x^2 \leq \frac{4}{9} \rightarrow |x| \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

همچنین حواستان باشد که مخرج کسر نباید صفر شود. یعنی $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ پس دامنه تابع به صورت $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ است.

۵) توابع قدرمطلق و جز صحیح:

$$f(x) = |g(x)| \quad f(x) = [g(x)] \quad \Rightarrow D_f = D_g$$

$$۲۳) f(x) = \left| \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} \right|$$

$$۲۴) f(x) = \left[\frac{x^2+1}{x^2-3x} \right]$$

☒ تذکر) اگر بخشی از ضابطه‌ی یک تابع شامل قدر مطلق و جز صحیح باشد برای یافتن

دامنه تعریف چنین توابعی از خواص قدرمطلق و جزء صحیح استفاده می‌کنیم:

ویژگی‌های جزء صحیح:

ویژگی اول:

$$۱) \bullet \leq x - [x] < 1 \Rightarrow \begin{cases} x - [x] = \bullet & x \in \mathbb{Z} \\ \bullet < x - [x] < 1 & x \in \mathbb{IR} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال 

$$۲۵) f(x) = \sqrt{x - [x]} =$$

$$۲۶) f(x) = \sqrt{[x] - x} =$$

$$۲۷) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - [x]}} =$$

$$۲۸) f(x) = \frac{1}{\sqrt{[x] - x}} =$$

ویژگی دوم:

$$۲) x \geq [x] \Rightarrow \begin{cases} x = [x] & x \in \mathbb{Z} \\ x > [x] & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}, [x'] \geq [x] \Rightarrow \begin{cases} [x'] = [x] & x \in [0, \sqrt{2}) \\ [x'] > [x] & x \in \mathbb{R} - [0, \sqrt{2}) \end{cases}$$

مثال

$$۲۹) f(x) = \frac{1}{x - [x]}$$

$$۳۰) f(x) = \sqrt{[|x|] - [x']}$$

ویژگی سوم:

$$۳) [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال (📖)

$$۳۱) f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]}$$

$$۳۲) f(x) = \frac{1}{[x] + [-x] + 1}$$

$$۳۳) f(x) = \frac{1}{[x] + [-x] + 2}$$

ویژگی چهارم:

$$۴) [x \pm n] = [x] \pm n \quad n \in \mathbb{Z}$$

۶) دامنه‌ی توابع لگاریتمی:

$$f(x) = \log_{q(x)}^{p(x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) > 0, q(x) > 0, q(x) \neq 1\}$$

📖 مثال) دامنه‌ی توابع لگاریتمی زیر را بیابید؟

۳۴) $f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

۳۵) $f(x) = \log_8 \log_7 (x-2)$

۳۶) $f(x) = \log \sqrt{x} + \sqrt{\log x}$

۳۷) $f(x) = \log_{\sqrt{x+1}} (x^2 - x - 2)$

□ تست ۳۸ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\log_7 (x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(۱) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(۲) $(-1, 2)$

(۳) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

(۴) $(-2, 1)$

□ تست ۳۹ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_5(|x^2 - 2| - x)$ کدام است؟ (تمرین)

(تجربی خارج ۱۴۰۰)

- (۱) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- (۳) $[-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

□ تست ۴۰ دامنه تغییرات تابع $f(x) = \log_5 \frac{1}{x + \sqrt{|x|} - |x|}$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

- (۱) $(-9, 9)$ (۲) $(-4, 9)$ (۳) $(4, 9)$ (۴) $(-4, 9)$

دامنه‌ی توابع مثلثاتی:

$$f(x) = \sin x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f(x) = \operatorname{cotg} x \quad D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi\}$$

📖 مثال) دامنه‌ی توابع مثلثاتی زیر را بیابید:

$$٤١) f(x) = \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$٤٢) f(x) = \sin(\log \sqrt{1-x^2})$$

$$٤٣) f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

۴۴) $f(x) = \cot g^3 x$

۴۵) $f(x) = \log \sin x$

چند تست پیرامون مفهوم و دامنه‌ی تابع

□ تست ۴۶) رابطه‌ی $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای

کدام مقدار m ، یک تابع است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m

□ تست ۴۷) اگر دامنه تابع $f = \{(3, -1), (2a+1, -1), (4b-5, a^2-2)\}$ تک عضوی

باشد. آن گاه حاصل ab کدام است؟ (مهر و ماه) (تمرین)

- (۱) -۳ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۲

□ تست ۴۸) کدام رابطه‌ی زیر تابع نیست؟

$$y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad (۴) \quad y = \sqrt{x^2} \quad (۳) \quad y^2 = x \quad (۲) \quad y^2 = x \quad (۱)$$

□ تست ۴۹) دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x-1}{[x]+[-x]}$ برابر کدام مجموعه است؟

$$R - Z \quad (۴) \quad Z \quad (۳) \quad R \quad (۲) \quad \phi \quad (۱)$$

□ تست ۵۰) اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه‌ی تابع $f(3-x)$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۲)

$$[1, 3] \quad (۴) \quad [1, 2] \quad (۳) \quad [0, 3] \quad (۲) \quad [0, 2] \quad (۱)$$

□ تست ۵۱) اگر دامنه ی تابع $f(x)$ برابر با $D_f = [-۲, ۶]$ باشد، دامنه ی تابع $۳f(۲x+۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟ (تمرین)

۲۵ (۴)

۹ (۳)

۱۷ (۲)

۴ (۱)

□ تست ۵۲) دامنه ی تابع با ضابطه ی $y = \sqrt{۴ - \sqrt{x+۱}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۵ (۴)

۱۶ (۳)

۱۷ (۲)

۱ صفر

□ تست ۵۳) دامنه ی تابع با ضابطه ی $y = \sqrt{-x^2(x^2 - ۴)^2}$ چند عضو دارد؟

۴ بی شمار

۳ (۳)

۱ (۲)

۱ صفر

□ تست ۵۴) دامنه ی تعریف تابع با ضابطه ی $y = \log[x]$ کدام است؟

(۴) $[۱, +\infty)$

(۳) $[۰, +\infty)$

(۲) $(۰, +\infty)$

(۱) $(۱, +\infty)$

□ تست ۵۵ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - \log(x - 1)}$ به کدام صورت است؟

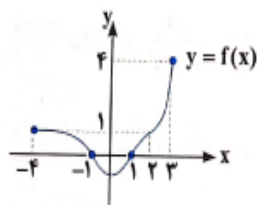
(تجربی خارج ۸۶)

- (۱) $(1, 2]$ (۲) $[2, 10]$ (۳) $[1, 11)$ (۴) $(1, 11]$

□ تست ۵۶ شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\frac{\sqrt{f(x)}}{1 - f(x)}$ شامل چند عدد صحیح

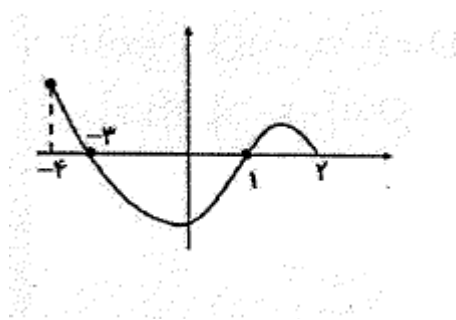
است؟ (IQ گاج)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷



□ تست ۵۷) اگر شکل روبرو نمودار $y=f(x)$ باشد، دامنه ی $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

- (۱) $[-۳ و ۲]$ (۲) $[۰ و ۲]$ (۳) $[-۴ و -۳] \cup [۱ و ۲]$ (۴) $[-۳ و ۰] \cup [۱ و ۲]$



پاسخ : گزینه ۴

دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر مجموعه جواب نامعادله $xf(x) \geq 0$ است. پس عبارت $x(f(x))$ را با استفاده از نمودار f تعیین علامت می کنیم:

حالا با توجه به جدول دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با :

$$[-۳ و ۰] \cup [۱ و ۲]$$

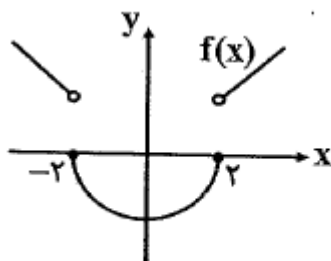
□ تست ۵۸) نمودار تابع $f(x)$ به شکل رو به رو است. دامنه ی تابع $y = \sqrt{(1-x^2)f(x)}$ کدام است. (سمپاد ۹۹)
(تمرین)

$$D = [-2, -1) \cup (1, 2] \quad (2)$$

$$D = [-2, 2] \quad (1)$$

$$D = [-2, -1] \cup [1, 2] \quad (4)$$

$$D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad (3)$$



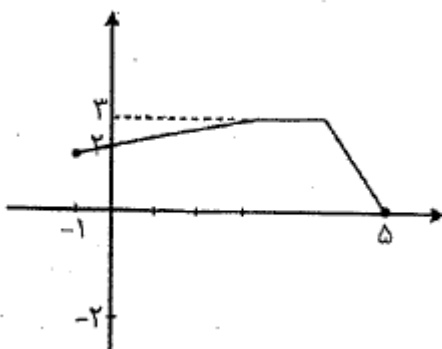
□ تست ۵۹) اگر نمودار f به شکل زیر باشد، دامنه ی تابع $f(-3x+2)+4$ شامل چند عدد صحیح است؟ (سنبش ۹۹)

$$19 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$



□ تست ۶۰ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه تابع $f \circ f(2x-2)$ کدام

است؟

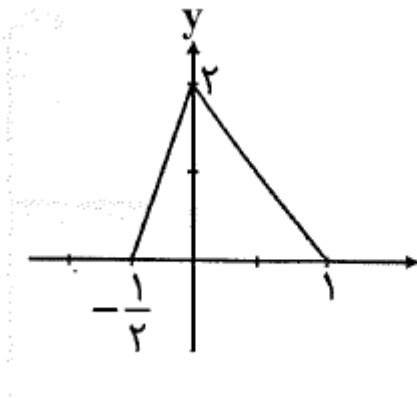
(سمپاد ۹۹)

(۴) $\left[\frac{7}{8} \text{ و } \frac{5}{4}\right]$

(۳) $\left[\frac{3}{4} \text{ و } \frac{7}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{4} \text{ و } \frac{3}{2}\right]$

(۲) $\left[-\frac{1}{2} \text{ و } 1\right]$

(۱) $\left[\frac{3}{4} \text{ و } \frac{3}{2}\right]$



برد توابع حقیقی:

به مؤلفه‌ی دوم هر زوج مرتب تابع، برد می‌گوییم یا به عبارت دیگر مقادیری هستند که به ازاء x های داده شده برای y بدست می‌آید و آن را با R_f نمایش می‌دهند.

📖 مثال

۶۱) $f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$

برای به دست آوردن برد روش خاصی وجود ندارد ولی می توان از نکات زیر بهره برد.

(۱) یافتن x بر حسب y در ضابطه‌ی داده شده و بدست آوردن حدود تغییرات y .

📖 مثال)

$$۶۲) f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cot g x =$$

$$۶۳) f(x) = ([x] + [-x])^{-1} =$$

$$۶۴) f(x) = \sqrt{x - |x|} =$$

$$۶۵) f(x) = \sqrt{[x] - [x']} =$$

$$۶۶) f(x) = [x - [x]] =$$

(۲) اگر یک تابع کثیرالجمله‌ای با بزرگترین درجه فرد باشد برد آن R است.

📖 مثال

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + x - 1 \quad R_f = \mathbb{R}$$

(۳) طریقه‌ی یافتن برد توابع سه جمله‌ای درجه (۲):

$$y = -x^2 + 1 \quad \text{حل: } x^2 = 1 - y \quad x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1$$

$$R_f = (-\infty, 1]$$

$$\text{روش دوم } A \left| \begin{array}{l} x = -\frac{b}{2a} = 0 \\ y = 1 \end{array} \right. \quad a < 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, 1]$$

$$y = 2x^2 - 4x + 3 \quad (\text{تمرین})$$

$$y = \sqrt{-x^2 + 6x - 17}$$

$$۷۱) y = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$$

۴) طریقه یافتن برد توابع گویا:

📖 مثال)

$$۷۲) y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$۷۳) y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

$$۷۴) y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

(تمرین)

(۵) برد توابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $R - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ است.

مثال

$$(۷۵) f(x) = \frac{-2x+3}{4x+1} =$$

$$(۷۶) f(x) = \sqrt{\frac{8x-1}{x+1}} =$$

$$(۷۷) f(x) = \frac{1-3|x|}{|x|+1} \quad \text{(تمرین)}$$

(۶) برد توابع اصم:

$$(۷۸) y = \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$$

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad (79)$$

(تمرین)

(7) برد توابع $f(x) = |x - a| + |x - b|$ برابر است با $y \geq |b - a|$

$$f(x) = |x - 2| + |x + 6| \quad (80)$$

(8) برد توابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ برابر است با $-|b - a| \leq y \leq |b - a|$

$$f(x) = |x + 3| - |x - 5| \quad (81)$$

(9) برد تابع $f(x) = ax - [ax]$ برابر با $(0, 1)$ و برد تابع $f(x) = ax - a[x]$ برابر است با $[0, a)$

□ تست 82) برد تابع $f(x) = 4x - 4[x] + 3$ کدام است؟

- (1) $[3, 7)$ (2) $(3, 7)$ (3) $[7, 10)$ (4) $(7, 10)$

□ تست ۸۳) برد تابع $y = \sqrt{x - [x]} - \frac{3}{4}$ را به دست آورید:

- (۱) $1 \leq y < 2$ (۲) $0 \leq y < \frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4} \leq y < 1$ (۴) $1 \leq y < 4$

۱۰) طریقه یافتن برد توابع شامل قدر مطلق و جز صحیح با استفاده از خواصشان:

□ تست ۸۴) برد تابع $y = \sqrt{x - 9\left[\frac{x}{9}\right]} + 5$ کدام است؟

- (۱) $[3, 5]$ (۲) $[5, 8)$ (۳) $(5, 8)$ (۴) $(3, 5)$

(تمرین)

□ تست ۸۵) برد تابع $y = \sqrt{1 - \sqrt{|x|}}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $[1, 2]$

□ تست ۸۶) برد تابع $y = x - |[x] - x|$ کدام است؟

- (۱) $R_f = \mathbb{N}$ (۲) $R_f = \mathbb{W}$ (۳) $R_f = \mathbb{Z}$ (۴) $R_f = \emptyset$

□ تست ۸۷) برد تابع $f(x) = \left[\frac{2|x|}{|x|+2} \right]$ کدام است؟

- (۱) $R_f = \{1\}$ (۲) $R_f = \{0, 1\}$ (۳) $R_f = \{1, 2\}$ (۴) $R_f = \{0, 2\}$

(۱۱) یافتن برد توابع با استفاده از نامساوی‌ها:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} \geq 2 & x > 0 \\ x + \frac{1}{x} \leq -2 & x < 0 \end{cases}, u^{2n} \geq 0$$

□ تست ۸۸) برد تابع $x^4 + 8x^2 + 4$ کدام است؟

- (۱) $(3, +\infty)$ (۲) $[4, +\infty)$ (۳) $(5, +\infty)$ (۴) $[6, +\infty)$

□ تست ۸۹) برد تابع $f(x) = x - \sqrt{x}$ کدام است؟ (تمرین)

(۱) $y \leq \frac{1}{4}$ (۲) $y \geq -\frac{1}{4}$ (۳) $y \geq \frac{1}{8}$ (۴) $y \geq -\frac{1}{8}$

□ تست ۹۰) برد تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ کدام است؟

(۱) $y \geq 0$ (۲) $y > 0$ (۳) $y \leq 0$ (۴) $y \geq 1$

□ تست ۹۱) برد تابع $y = \cos^2 x - \cos x$ کدام است؟ (تمرین)

(۱) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ (۲) $\left[-\frac{1}{4}, 2\right]$ (۳) $[2, 4]$ (۴) $[2, 3]$

□ تست ۹۲) برد تابع $y = \cos^2 x - 4 \cos x$ کدام است؟

(۱) $[-2, 5]$ (۲) $[-3, 5]$ (۳) $[4, 5]$ (۴) $[3, 5]$

□ تست ۹۳) برد تابع $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ کدام است؟

- (۱) $y \geq 1$ (۲) $y \geq 2$ (۳) $y \geq 3$ (۴) $y \geq 4$

□ تست ۹۴) برد تابع $y = x + 5 + \frac{1}{x+3}$ کدام است؟

- (۱) $y \geq 4$ یا $y \leq 2$ (۲) $y \geq 4$ یا $y \leq 0$
(۳) $y \geq 0$ یا $y \leq -1$ (۴) $y \geq 1$ یا $y \leq 0$

(۱۲) برد تابع $y = a \sin x + b \cos x + c$ برابر است با:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$$

□ تست ۹۵) در تابع $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 1$ را بدست آورید:

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[-4, 6]$ (۴) $[1, 2]$

(۱۳) برای بدست آوردن برد تابع $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x + c$ و $f(x) = a \cos^2 x + b \cos x + c$

یکبار به جای $\sin x$ یا $\cos x$ ۱ یا -۱ و $-\frac{b}{2a}$ قرار می‌دهیم.

□ تست ۹۶) برد تابع $f(x) = \sin^2 x - 4 \sin x + 3$ کدام است؟

- (۱) $[1, 5]$ (۲) $[0, 8]$ (۳) $[4, 7]$ (۴) $[5, 9]$

(۱۴) یافتن برخی از توابع مثلثاتی با استفاده از خواص نسبت‌های مثلثاتی:

۱) $-1 \leq \sin u \leq 1$ $-1 \leq \sin^n u \leq 1$

۲) $-1 \leq \cos u \leq 1$ $-1 \leq \cos^n u \leq 1$

📖 مثال)

۹۷) $y = -3 \cos 2x + 1$

۳) $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \sin^n x + \cos^n x \leq 1$

۹۸) $\sin^2 x + \cos^2 x$

$$۴) a, b > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow a \operatorname{tg} x + b \cot gx \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a, b > 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow a \operatorname{tg} x + b \cot gx \leq -2\sqrt{ab}$$

مثال 

$$۹۹) y = ۴ \operatorname{tg} x + ۹ \cot gx$$

۱۵) برای محاسبه برد توابع چند ضابطه‌ای برد تک تک ضابطه‌ها را بدست آورده و بین آنها اجتماع می‌گیریم.

$$۱۰۰) f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 2 \\ x^2 + 2 & x < 2 \end{cases}$$

□ تست ۱۰۱) برد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -x-1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ کدام است؟ (تمرین)

(۱) $\mathbb{R} - [0, 1)$ (۲) $[-2, 0] \cup (1, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -2] \cup [0, 1)$ (۴) $[-2, +\infty)$

□ تست ۱۰۲) برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 2x & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ کدام است؟ (موج آزمون)

(۱) $[-1, 0]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[-\frac{1}{4}, 0]$

□ تست ۱۰۳) اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، برد تابع $y = 1 + 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ کدام

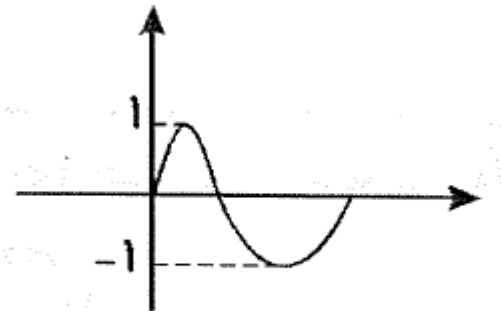
است؟ (قلم چی ۹۶) (تمرین)

۴) $[-2, 4]$

۳) $[-2, 0]$

۲) $[2, 4]$

۱) $[-2, 2]$



تع تساوی دو تابع:

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با هم مساوی می گوئیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) دامنه دو تابع با هم برابر باشد. $(D_f = D_g)$

۲) به ازای هر $x \in D$ مقدار آنها با هم برابر باشد: $\forall x, D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$

□ تست ۱۰۴) نمودار تابع با ضابطه $y = ||3x| - |x||$ بر نمودار کدام تابع با ضابطه زیر،

منطبق است؟

۴) $|2x|$

۳) $|4x|$

۲) $|3x| - x$

۱) $|3x| - |2x|$

□ تست ۱۰۵ کدام یک از توابع زیر با هم برابرند؟

$$(۱) f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, g(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cot x$$

$$(۲) f(x) = \sqrt{(x-2)^2}, g(x) = x-2$$

$$(۳) f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$(۴) f(x) = |x|, g(x) = x^2$$

□ تست ۱۰۶ اگر دو تابع $f = \{(2, -1), (c, b)\}$ و $g = \{(2a^2 - 1, b^2 + 1), (b + 1, 2a - 1)\}$ برابر باشند، کدام است؟

(قلم چی ۹۹)

۱(۴

۲(۳

-۱(۲

صفر(۱

□ تست ۱۰۷ دو تابع f و g مفروض اند در کدام گزینه، دو تابع مساوی اند؟

$$(۲) f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, g(x) = 1$$

$$(۱) f(x) = 2 \log x, g(x) = \log x^2$$

$$(۴) f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(۳) f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x$$

□ تست ۱۰۸ کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟ (تجربی خارج ۹۷)

(تمرین)

$$\log(x-2) - \log x \quad (1)$$

$$\log \frac{x^2-4}{x^2+2x} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \quad (3)$$

$$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \quad (4)$$

□ تست ۱۰۹ اگر دو تابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ ، $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم برابر باشند، مقدار $a+d$ کدام است؟

۸(۱) ۹(۲) ۱۰(۳) ۱۲(۴)

◆ **تابع همانی:** اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو از دامنه، دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، آن تابع را همانی گوئیم.

📖 مثال ۱۱۰ تابع $f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ یک تابع همانی است نمودار تابع همانی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم یا بخشی از آن است.

تذکره) معادله‌ی تابع همانی را با $f(x) = x$ نمایش می‌دهیم.

□ تست ۱۱۱) به ازای کدام مقادیر m خط به معادله $y = (m - 1)x + 2 - m$ از ناحیه اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟
(میکرو گاج)

۱) $m > 1$ ۲) $1 < m < 2$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

□ تست ۱۱۲) اگر تابع $y = \frac{2x^2 + x}{(a-1)x^2 + bx + c}$ در دامنه خود یک تابع همانی باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟ (قلم چی ۹۹)
(تمرین)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

♦ **تابع ثابت:** هر تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو باشد را تابع ثابت گوئیم. به عنوان مثال $f = \{(1,0), (2,0), (-2,0)\}$ را یک تابع ثابت گوئیم. معادله‌ی تابع ثابت را با ضابطه‌ی $f(x) = a$ نمایش می‌دهیم.

□ **تست ۱۱۳)** اگر f تابع ثابت، g تابع همانی و $\frac{f(2)}{g(-1)} = 1$ باشد، آن گاه حاصل $f(2) \times g(2)$ کدام گزینه می‌باشد؟
(قلم چی ۹۹)

۵(۱) -۵(۲) ۴(۳) -۴(۴)

□ **تست ۱۱۴)** دو تابع $f(x) = b - 3ax$ ، $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=0$ باشد، حاصل bc چقدر است؟
(تجربی ۱۴۰۱)

-۶(۱) -۴(۲) ۴(۳) ۶(۴)

□ **تست ۱۱۵)** اگر $f(x) = (4-a)x^2 + (3+b)x + ab + 19$ ضابطه‌ی یک تابع ثابت با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد مقدار $f(a+b)$ کدام است؟ (موج آزمون) (تمرین)

۱(۱) ۷(۲) ۹(۳) -۱۲(۴)

۸۸ محاسبه $f(x)$ ها:

(۱) حالت اول: اگر ضابطه $f(x)$ در دست باشد برای محاسبه $f(u)$ کافی است u را به جای x جایگزین کنیم (u می توان یک عدد، یک حرف یا یک عبارت جبری یا مثلثاتی باشد) در توابع چند ضابطه ای بایستی از ضابطه مناسب برای جایگزینی u استفاده کرد.

□ تست (۱۱۶) اگر $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1) & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ باشد $f(-f(x))$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + 1$ (۲) $-(x^2 + 1)$ (۳) ۱ (۴) -۱

□ تست (۱۱۷) اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل $f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + \dots + f(\sqrt{40})$

(مهر و ماه)

کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴۰ (۳) ۶ (۴) ۳۴

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \text{ فرد باشد} \\ x-1 & x \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad \text{مقدار } f(x) = f(1) + f(2) + \dots + f(20) \quad \square \text{ تست ۱۱۸ اگر}$$

(تمرین)

کدام است؟ (موج آزمون الگو)

۲۵۰(۴

۲۴۰(۳

۲۳۰(۲

۲۱۰(۱

☞ نکته) هر نقطه که مختصاتش در معادله $y = f(x)$ صدق کند بر نمودار تابع f قرار دارد و برعکس، اگر نقطه‌ای بر نمودار تابع f واقع باشد مختصاتش در معادله‌ی بالا صدق خواهد کرد.

☐ تست ۱۱۹ دو تابع $y = x^2 + ax - 3b$ و $y = -x + b$ داده شده‌اند، به ازای کدام مقدار

a و b نمودار این دو تابع روی محور x ها در نقطه‌ای به طول ۱ همدیگر را قطع می‌کنند؟

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \quad (4$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \quad (3$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \quad (2$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad (1$$

(۲) حالت دوم: اگر $f(u)$ معلوم باشد و با فرض $u = t$ بتوانیم x را بر حسب t به سادگی به دست آوریم در این صورت $f(t)$ را بر حسب t تعیین و به جای x را جایگزین می کنیم.

□ تست ۱۲۰) اگر $f\left(\frac{x+2}{x}\right) = x^2$ باشد دامنه تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) R (۲) $R - \{0\}$ (۳) $R - \{1\}$ (۴) $R - \{0, 1\}$

□ تست ۱۲۱) اگر $f(x^2 + 5) = \sin x$ باشد $f(5)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sin 5$ (۴) -۱

(۳) حالت سوم: اگر $f(u)$ معلوم باشد و با فرض $u = t$ نتوانیم x را بر حسب t به سادگی به دست آوریم $f(u)$ را به صورت ترکیبی از u درآورده و سپس $f(t)$ را به دست می آوریم و از آن جا $f(x)$ تعیین می شود.

□ تست ۱۲۲) اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه ی تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

(ریاضی ۸۹)

$$\frac{2x-1}{x^2-1} (4)$$

$$\frac{2x+1}{1-x^2} (3)$$

$$\frac{2x}{x^2-1} (2)$$

$$\frac{1}{1-x^2} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} f(x^2) - 2f(x) + 1 &= \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2x}{x-1} + 1 \\ &= \frac{x^2 - 2x(x+1) + (x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{x^2-1} \\ &= \frac{-2x-1}{x^2-1} = \frac{-(2x+1)}{x^2-1} = \frac{2x+1}{1-x^2} \end{aligned}$$

□ تست ۱۲۳) اگر $f(x) - 2f(2) = x^2 - 3x + 4$ مقدار $f(-2)$ کدام است؟ (تمرین)

(موج آزمون)

$$10 (4)$$

$$8 (3)$$

$$6 (2)$$

$$4 (1)$$

□ تست ۱۲۴ اگر $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ و $x < 0$ باشد ضابطه‌ی $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{1+x^2}$ (۲) $-\sqrt{1+x^2}$ (۳) $-\sqrt{1+x}$ (۴) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

□ تست ۱۲۵ اگر $f(x) = 2^x$ باشد حاصل عبارت $f(x+1) - f(x-1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}f(x)$ (۲) $f(x)$ (۳) $-f(x)$ (۴) $-\frac{3}{2}f(x)$

□ تست ۱۲۶ اگر $f(x) = \sqrt{x+2|x|}$ مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

□ تست ۱۲۷) اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ و

$B(1, 1)$ بگذرد $f(-1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{-1}{4}$ (۳)

$\frac{-1}{2}$ (۲)

$\frac{-3}{4}$ (۱)

□ تست ۱۲۸) نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$ نمودار تابع $y = x^2 - x$

را در دو نقطه به طول های ۱ و ۲ قطع می کند $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸) (تمرین)

۶(۴)

۵(۳)

۴(۲)

۳(۱)

□ تست ۱۲۹) اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۸)

$\sqrt{2}$ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

تعریف نشده (۱)

□ تست ۱۳۰ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار

(تجربی ۹۰)

$f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

□ تست ۱۳۱ تابع با ضابطه $f(x) = 2x - 1$ مفروض است. اگر $f(a) = 3f(1) - f(0)$ باشد، مقدار a

(تمرین)

کدام است؟ (آزمون های گاج)

۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۲ (۱)

□ تست ۱۳۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض است $f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ کدام است؟

$\frac{9}{4}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

□ تست ۱۳۳ در تابع $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ مقدار $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

□ تست ۱۳۴ اگر $f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x}$ باشد حاصل $f(2) + f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲

□ تست ۱۳۵ اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$ باشد حاصل $f(f(f(-8)))$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{9}$

□ تست ۱۳۶) با فرض $f(x) = 1 - \sqrt{a+x}$ ، اگر عرض از مبدا نمودار f^{-1} برابر با ۲- باشد، a کدام است؟ (۱۹ گاج) (تمرین)

- ۲(۱) -۲(۲) ۳(۳) -۳(۴)

□ تست ۱۳۷) در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $4x$ ۳) $2x^2$ ۴) $4x^2$

□ تست ۱۳۸) اگر $f(x^2 + x) = x^6 + 2x^2 + x^2$ باشد، آن گاه حاصل $f(\sqrt{3})$ چقدر است؟

- ۱) ۷ ۲) ۳ ۳) $(3 + \sqrt{3})^2$ ۴) $\sqrt{3}$

□ تست ۱۳۹) اگر $f\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ باشد آن گاه ضابطه ی $f(x)$ به صورت:

(۱) $x^2 - 2$ (۲) $x^2 + 2$ (۳) $(x - 2)^2$ (۴) $2x^2 + 3$

□ تست ۱۴۰) اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه ی $f(x)$ برابر کدام است؟ (تمرین)

(تجربی ۹۷)

(۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

□ تست ۱۴۱) اگر $f(2x + 3) = 4x^2 + 10x + 6$ ضابطه تابع $f(x)$ کدام است؟

(گزینه دو ۱۴۰۰)

(۱) $y = x^2 + x - 2$ (۲) $y = x^2 + x - 6$

(۳) $y = x^2 + x$ (۴) $y = x^2 - x$

□ تست ۱۴۲ اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ حاصل $f(x) + f\left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}\right)$ برابر است با:

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۰

□ تست ۱۴۳ اگر $f(x+1) = x^2 - 3x^2 + 3x$ باشد، $f(\sqrt{2} + 2)$ کدام است؟ (سمپاد ۹۹)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

□ تست ۱۴۴ اگر $f(x^2 - 4x) = 12x + 5 - 3x^2$ باشد، $f(4)$ کدام است؟ (مدارس برتر ۹۹)

- (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) -۷ (۴) ۷

□ تست ۱۴۵) اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ باشد $f(\sqrt{5})$ کدام است؟ (سنجش ۹۴)

$\sqrt{5}(1)$ $2\sqrt{5}(3)$ $3\sqrt{5}(2)$ $4\sqrt{5}(4)$

□ تست ۱۴۶) اگر $f(x-2) + f(2-x) = 4x + 1$ باشد، آنگاه $f(3)$ کدام است؟ (تمرین)

(قلمچی ۹۴)

$4(1)$ $2/5(2)$ $3(0)$ $4/5(4)$

□ تست ۱۴۷) نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x < 0 \\ 2bx^2 + 7 & x \geq 0 \end{cases}$ از نقطه $(3, -1)$ عبور

می کند. اگر $f(2) = 0$ باشد، ab کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزشی)

$1/2(1)$ $2/3(2)$ $5/2(3)$ $7/2(4)$

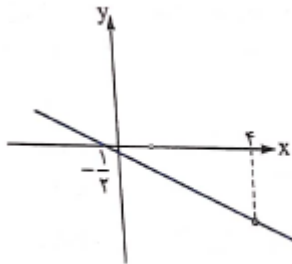
□ تست ۱۴۸ اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{-x^2 + bx + c}{2x + d}$ به صورت مقابل باشد، مقدار $b+c+d$ کدام است؟
(خیلی سبز)

۲/۵(۴)

-۲/۵(۳)

۱(۲)

-۱(۱)



□ تست ۱۴۹ شکل زیر، نمودار سه تابع درجه ی سه به فرم $y = ax^3$ را نمایش می دهد.

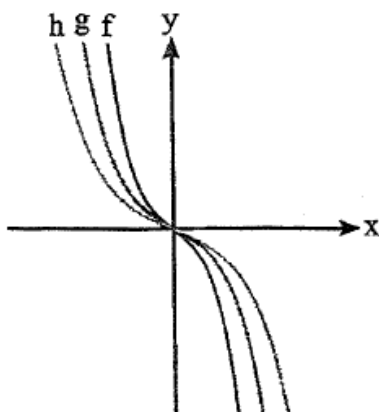
ضابطه های توابع f, g, h کدام است؟ (مهر و ماه)
(تمرین)

$$h(x) = \frac{1}{4}x^3, g(x) = x^3, f(x) = 2x^3 \quad (۱)$$

$$h(x) = -\frac{1}{4}x^3, g(x) = -x^3, f(x) = -2x^3 \quad (۲)$$

$$h(x) = -2x^3, g(x) = -x^3, f(x) = -\frac{1}{4}x^3 \quad (۳)$$

$$h(x) = -2x^3, g(x) = -\frac{1}{4}x^3, f(x) = -x^3 \quad (۴)$$



اعمال روی توابع:

فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی با دامنه D_f و D_g باشند توابع cf ($c \in \mathbb{R}$) و $f \pm g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ و $f \circ g$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$۱) (cf)(x) = cf(x) \rightarrow D_{cf} = D_f$$

$$۲) (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \rightarrow D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$۳) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$۴) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$۵) f \circ g(x) = f(g(x)) \rightarrow D_{f \circ g} = \underbrace{\{x \mid x \in D_g\}}_1 \cap \underbrace{\{g(x) \in D_f\}}_2 = (۱) \cap (۲)$$

📖 مثال ۱۵۰) اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، a و b و c را طوری تعیین

کنید که داشته باشیم $(fog)(x) = x^2 - 3x + 4$

📖 مثال ۱۵۱) اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را بیابید:

📖 تست ۱۵۲) هرگاه $f = \{(1,2), (3,4), (2,3)\}$ ، $g = \{(1,3), (2,-1), (5,6)\}$ ، آن گاه $2f + 3g$

کدام است؟

(۲) $\{(1,13), (2,3)\}$

(۱) $\{(2,5), (10,7)\}$

(۴) $\{(4,13), (5,3)\}$

(۳) $\{(4,13), (8,3)\}$

□ تست ۱۵۳) هر گاه $f(x) = \sqrt{2x-4}$, $g(x) = \sqrt{3a-x} - b$, $D_{f+g} = [2, 12]$, $(f-g)(10) = -\sqrt{2}$

باشد، حاصل ab کدام است؟ (مهر و ماه)

(تمرین)

-۱۶(۴

۱۶(۳

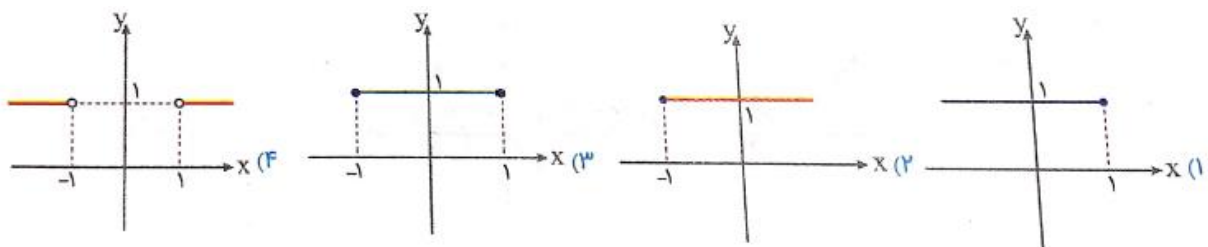
-۴(۲

۴(۱

□ تست ۱۵۴) اگر $f(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ باشند، نمودار تابع $f-g$

(میکرو گاج)

کدام است؟



□ تست ۱۵۵) اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 1-x^2 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -2x & x < 1 \\ x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$ آن گاه ضابطه

تابع $f-g$ کدام است؟

$$(1) \quad \begin{cases} 3x+1 & x < 0 \\ -1-x^2 & x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+3x & x \leq 0 \\ 1+2x-x^2 & 0 < x < 1 \\ -1-2x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

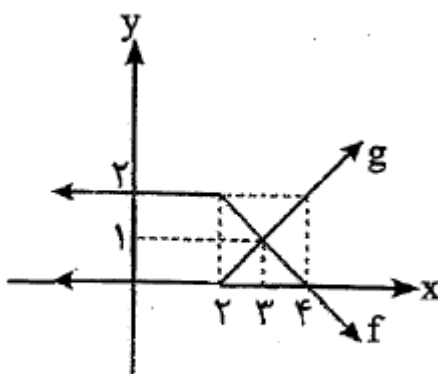
$$(3) \quad \begin{cases} 1+3x & x \leq 0 \\ -1-x^2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+3x & x < 0 \\ 1+2x+x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -1-2x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

□ تست ۱۵۶) در شکل مقابل نمودارهای دو تابع f , g رسم شده است. کدام گزینه ضابطه ی

تابع $f+g$ را نمایش می دهد؟ (کتاب درسی) (تمرین)

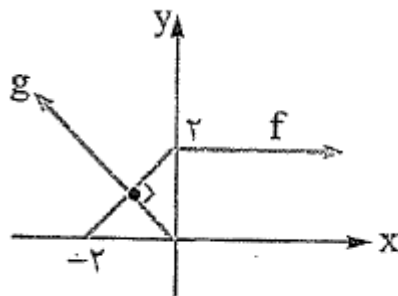
$$(1) \quad (f+g)(x) = \begin{cases} 2 & x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases} \quad (f+g)(x) = 2(2)$$

$$(3) \quad (f+g)(x) = \begin{cases} 2 & x < 2 \\ 6-2x & x \geq 2 \end{cases} \quad (4) \quad (f+g)(x) = \begin{cases} 2 & x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$$



□ تست ۱۵۷ اگر نمودارهای f ، g به صورت مقابل باشند، برد تابع $f+2g$ کدام است؟

- (۱) $[-۲, ۰]$ (۲) $[۲, ۴]$ (۳) $[۲, ۵]$ (۴) $[-۲, ۲]$



□ تست ۱۵۸ اگر $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ ، $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ برد تابع $f.g$ کدام است؟

(نردبام خیلی سبز)

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $[۰, ۱]$ (۴) $[۰, +\infty)$

□ تست ۱۵۹ اگر $g(x) = \sqrt{2x+3} - x$, $f = \{(-3,7), (-1,2), (2,4), (0,5), (6,-2)\}$ مقدار $(fog)(3)$ کدام است؟
(گزینه دو ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۵

□ تست ۱۶۰ اگر $g = \{(2,3), (2,1), (4,5), (1,3)\}$, $f = \{(2,5), (6,3), (3,4), (4,7)\}$ باشد، آن گاه برد تابع $fo(g)$ کدام است؟
(کانون فرهنگی آموزشی ۹۹)

۱) $\{5,3\}$ ۲) $\{4,5,7\}$ ۳) $\{3,5,7\}$ ۴) $\{3,4,5,7\}$

□ تست ۱۶۱ توابع $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$, $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ مفروض اند. اگر $(4,2) \in fog$, $(4,1) \in gof$ باشند، دو تایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی ۹۰)
(تمرین)

۱) $(3,4)$ ۲) $(4,3)$ ۳) $(4,5)$ ۴) $(5,4)$

□ تست ۱۶۲ اگر $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 4), (4, 7)\}$ و $g = \{(3, 2), (2, 1), (4, 5), (1, 3)\}$ باشد.

آن گاه برد تابع $fo(g)$ کدام است؟ (قلم چی ۹۹)

- (۱) $\{5, 3\}$ (۲) $\{4, 5, 7\}$ (۳) $\{7, 5, 3\}$ (۴) $\{3, 4, 5, 7\}$

□ تست ۱۶۳ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} & x \geq 1 \\ \cot g \frac{\pi}{4} x & 0 < x < 1 \end{cases}$ آن گاه مقدار $fof\left(\frac{2}{3}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳

□ تست ۱۶۴ تابع $f(x) = 4x - 3$ با دامنه ی $[-2, 1]$ مفروض است. اگر دامنه ی تعریف تابع fof

بازه ی $[a, b]$ باشد $b - a$ کدام است؟ (قلم چی ۹۵) (تمرین)

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) ۲ (۴) ۳

$$f\left(f\left(-\frac{5}{4}\right)\right) \text{ حاصل } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < -1 \\ -\frac{5}{x} + 1 & 1 - \{0\} \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 6} & x \geq 1 \end{cases} \quad \square \text{ تست ۱۶۵) اگر } \{0\}$$

(خوشخوان)

کدام است؟

$$\frac{7}{6}(-4) \quad 7(3) \quad 6(2) \quad -5(1)$$

$$\square \text{ تست ۱۶۶) اگر } f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ و } g(x) = \sqrt{x-x^2} \text{ باشد، دامنه ی تابع } g \circ f \text{ کدام است؟}$$

(ریاضی خارج ۹۶)

$$\mathbb{R} - (-1, 1) \quad (4) \quad \mathbb{R} \quad (3) \quad [-1, 1] \quad (2) \quad [0, 1] \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۲

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \xrightarrow{1+x^2 \neq 0} D_f = \mathbb{R} \quad (1)$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow \text{عبارت زیر رادیکال} \geq 0 \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(2) \quad D_g = [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \rightarrow \text{جدول تعیین علامت}$$

حال تعریف دامنه ی تابع $g \circ f$ را می نویسیم.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \rightarrow \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-x^2}{1+x^2} \in [0, 1]\right\} \Rightarrow D_{g \circ f} = 2 \cap 4$$

و اما حل ۴:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \in [0,1] \Rightarrow \text{یعنی} \rightarrow 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} > 0 \Rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$$

دو تا نامعادله داریم

$$\rightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x^2 \leq 1+x^2 \Rightarrow 0 \leq 2x^2 \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow D_{Gof} = \mathbb{R} \cap [-1,1] = [-1,1]$$

□ تست ۱۶۷) توابع f و g در $\mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \sqrt{x+3}$ و $g(x) = \sqrt{4-x}$ تعریف شده‌اند.

دامنه‌ی $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $[-3, 13]$ (۲) $[3, -4]$ (۳) $(-\infty, 4)$ (۴) $(-3, +\infty)$

□ تست ۱۶۸) اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند دامنه تابع

(سراسری تجربی ۹۴)

$f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-2, 0]$ (۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

□ تست ۱۶۹) اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشند، دامنه ی تابع $f \circ g$ کدام

(تمرین)

است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

- (۱) $(0, 5) \cup [20, 25]$ (۲) $[-5, 0) \cup (15, 20]$

- (۳) $[15, 20]$ (۴) $(-5, 0)$

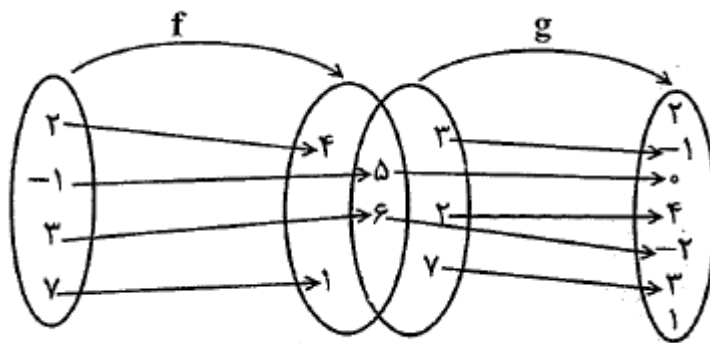
□ تست ۱۷۰) باتوجه به شکل زیر، دامنه gof چند عضو دارد؟ (گزینه دو ۹۹)

۴(۴

۳(۳

۲(۲

۱(۱



□ تست ۱۷۱) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند، جواب معادله $(gof)(x) = (fog)(x)$

(تجربی خارج ۹۷)

کدام است؟

۱ و ۷(۴

-۱ و ۷(۳

۱ و -۷(۲

-۱ و -۷(۱

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x + 4$ ضابطه های $(fog)(x) = (gof)(x)$ را به دست

آورده و معادله $(gof)(x)$ را حل می کنیم.

$$۱) (gof)(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4(x+2)}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$۲) (fog)(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$1 و 2 \Rightarrow \frac{6x+7}{x+2} = \frac{2x+7}{x+6} \Rightarrow \frac{(6x+7)(x+6)}{6x^2+42x+42} = \frac{(2x+7)(x+2)}{2x^2+12x+12}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -7$$

□ تست ۱۷۲ اگر $g(x) = x + 2$; $f(x) = (2x - 3)^2$ نمودارهای دو تابع f و

(سراسری تجربی ۹۲)

fog با کدام طول متقاطع اند؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

□ تست ۱۷۳ اگر $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $fog = (x+1)$ آن گاه $g(x)$ کدام است؟

$\frac{x-1}{x}$ (۴)

$\frac{1}{x-1}$ (۳)

$\frac{1}{x}$ (۲)

x (۱)

□ تست ۱۷۴) اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

(تمرین)

$$2x^2 - 3x + 7(2)$$

$$2x^2 - 7x + 3(1)$$

$$4x^2 - 4x + 11(4)$$

$$4x^2 - 2x + 12(3)$$

□ تست ۱۷۵) اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x + 1}$ باشند مساحت ناحیه

محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

$$6(4)$$

$$4/5(3)$$

$$4(2)$$

$$3(1)$$

□ تست ۱۷۶) اگر $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$, $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ باشند، ضابطه ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟
(تجربی خارج ۹۶)

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-1$ ۴) $x+1$

پاسخ: گزینه ۳

برای محاسبه $g(f(x))$ کافیست توی تابع $g(x)$ به جای همه ی x ها، $f(x)$ را قرار دهیم.

$$g(x) = \frac{1-3x}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow f(x)} g(f(x)) = \frac{1-3f(x)}{f(x)+2} \xrightarrow{f(x) = \frac{2x+3}{2-x}} g(f(x)) = \frac{1-3 \times \frac{2x+3}{2-x}}{\frac{2x+3}{2-x} + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-7x-7}{2-x}$$

$$= -x-1$$

□ تست ۱۷۷) اگر $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ 5x & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = x^2$ باشد ضابطه تابع $fog(x)$ کدام

است؟

۱) $fog(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 0 \\ 5x^2 & x < 0 \end{cases}$

۲) $fog(x) = x^2 + 2$

۴) $fog(x) = \begin{cases} 5x^2 & x \geq 0 \\ x^2 + 2 & x < 0 \end{cases}$

۳) $fog(x) = 5x^2$

□ تست ۱۷۸) اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3-x & x > 0 \\ 2-x & x < 0 \end{cases}$ آن گاه

(موج آزمون الگو)

$(g \circ f)(x)$ کدام است؟

$$\begin{cases} 4-x & x \geq 0 \\ 2-x & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 4-x & x \geq 0 \\ 3-x & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ 3-x & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x & x \geq 0 \\ 3-x & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

تابع $g \circ f$ به شکل زیر است:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 3-f(x) & f(x) > 0 \\ 2-f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

کافی است نامعادله های $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ را حل کنیم، حل $f(x) > 0 \therefore x \geq 0$ آن گاه

$$f(x) = x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \geq 0$$

اگر $x < 0$ ، آن گاه:

$$f(x) = x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

حل $f(x) < 0$: اگر $x \geq 0$ آن گاه:

$$f(x) = x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

اگر $x < 0$ آن گاه:

$$f(x) = x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x < 0$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 3-(x+1) & x \geq 0 \\ 2-(x-1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ 3-x & x < 0 \end{cases} \quad \text{بنابراین}$$

□ تست ۱۷۹ اگر $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ ، $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ باشند، ضابطه ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

(تمرین)

(تجربی ۹۶)

۲x(۴

x (۳

x+۱ (۲

x-۱(۱

□ تست ۱۸۰ f تابعی است خطی از درجه اول که $f(x) = 4x + 3$ و آن گاه مقدار $f(-2)$

کدام است؟

-۳ (۴

۱ (۳

-۳ و ۱ (۲

-۵ (۱

□ تست ۱۸۱) در تابع با ضابطه ی $f(x) = a.b^x$, $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$; $f(-2) = \frac{3}{32}$.

مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

□ تست ۱۸۲) اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$, $g(x) = \sin^2 x$ باشند، ضابطه ی تابع $f \circ g$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

$\frac{1}{4} \cos^2 x$ (۴)

$\frac{1}{4} \cos^2 x$ (۳)

$-\frac{1}{4} \sin^2 x$ (۲)

$-\frac{1}{4} \sin^2 x$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می دانیم: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(\sin^2 x) = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin x \\ &= \sin^2 x (\sin x - 1) = -\sin x (1 - \sin x) = -\sin x \cdot \cos^2 x \\ &= -(\sin x \cdot \cos x) = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = -\frac{1}{2} \sin 2x \end{aligned}$$

□ تست ۱۸۳ اگر $x \neq 1$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ضابطه‌ی تابع $(f \circ f)(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) x (۲) $-x$ (۳) $\frac{x-1}{x+1}$ (۴) $\frac{2x}{x-1}$

□ تست ۱۸۴ اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ آن گاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟ (تجربی ۸۶)

- (۱) -4 (۲) -3 (۳) -2 (۴) -1

□ تست ۱۸۵ اگر $f(x) = [x]$ ، مجموعه‌ی مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟

- (۱) $\{0\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{-1, 0, 1\}$

□ تست ۱۸۶ اگر $f(x) = \frac{x}{2-x}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$ ضابطه‌ی تابع g برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{x}{x+1}$ (۲) $\frac{x-1}{x}$ (۳) $\frac{x}{x-1}$ (۴) $\frac{x+1}{x}$

□ تست ۱۸۷ اگر $g(x) = 2x + 1$ ، $f(g(x)) = 4x^2 - 1$ باشند، جواب معادله $f(x) = 2x - 2$ کدام است؟ (میکرو گاج)

(تمرین)

- (۱) $2 \pm \sqrt{2}$ (۲) $2 \pm \sqrt{3}$ (۳) $3 \pm \sqrt{2}$ (۴) $3 \pm \sqrt{3}$

□ تست ۱۸۸ اگر $f(x) = 2x$ ، $g \circ f(x) = 5x^2 + 11$ باشد، کمترین مقدار $g(x-2)$ چقدر است؟

(تجربی ۱۴۰۱)

- (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

□ تست ۱۸۹ اگر $(fog)(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشد، تابع $f(x)$ برابر با کدام گزینه است؟ (مرآت ۱۴۰۰)

$x^2 + 2(4)$
 $x^2 - 4(3)$
 $x^2 - 2(2)$
 $x^2(1)$

□ تست ۱۹۰ اگر $f(x) = x^2 + 6x + 4$ و $fog(x) = x^2 + 10x + 20$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام می تواند باشد؟ (مدارس برتر ۱۴۰۰) (تمرین)

$x - 8(4)$
 $-x + 2(3)$
 $-x - 8(2)$
 $x + 2(1)$

□ تست ۱۹۱ اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ مقدار $g(1)$ کدام است؟ (تجربی ۸۴)

$2(1)$
 $3(2)$
 $4(3)$
 $5(4)$

□ تست ۱۹۲) اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ مقدار $g(-2)$ کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴)

□ تست ۱۹۳) اگر دو تابع $f(x) = 3x - 2$ ، $(fog)(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ مفروض باشند، مقدار $g(1)$

کدام است؟ (قلم چی ۹۹) (تمرین)

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۲ (۳) ۴ (۴)

□ تست ۱۹۴) اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ ، $g(f(a)) = 5$

باشد عدد a کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

□ تست ۱۹۵ اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = 2x + 1$ ساده شده عبارت $(fog)(x) + (gof)(x)$ کدام است؟
(موج آزمون الگو)

$$\frac{2x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 2x} \quad (۴)$$

$$\frac{2x^2 - 1}{2x^2 - 2x} \quad (۳)$$

$$\frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - 2x} \quad (۲)$$

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 2x} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا $(fog)(x)$, $(gof)(x)$ را به دست می آوریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \frac{1}{2x + 1 - 1} = \frac{1}{2x}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{x-1} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

بنابراین:

$$(fog)(x) + (gof)(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1 + 2x^2 + 2x}{2x(x-1)} = \frac{2x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 2x}$$

□ تست ۱۹۶ اگر $f(x) = 3x^2 + x - 1$, $g(x) = 1 - 2x$ باشد، آنگاه در معادله ی

$(fog)(x) + (gof)(x) = 5 - 6x$ (سنجش ۱۴۰۰) (تمرین)

$$-\frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۱)$$

□ تست ۱۹۷) اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = \frac{-1}{2}x + 2$ مجموعه طول نقاط از

منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار گیرد برابر کدام بازه است؟

(سراسری تجربی ۹۱)

- (۱) $(-۴, ۱)$ (۲) $(۲, -۳)$ (۳) $(۱, -۲)$ (۴) $(-۱, ۴)$

تعریف تابع یک به یک:

تابعی که در آن هیچ دو زوج با مؤلفه‌های دوم یکسان وجود نداشته باشد یعنی:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

□ مثال ۱۹۸) به ازای چه مقداری از m تابع $F = \{(1, 2), (m, 3), (-1, 4), (7, 3)\}$ یک به یک

می‌باشد؟

□ تست ۱۹۹ اگر F تابعی یک به یک باشد و $f(x) = f\left(\frac{g(x)}{g(x)+1}\right)$ آن گاه $g(2)$ کدام است؟

(نردبام خیلی سبز)

$$\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{3}$$

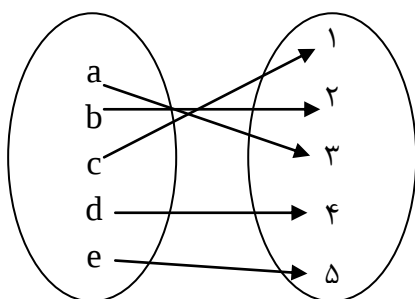
$$-2$$

$$2$$

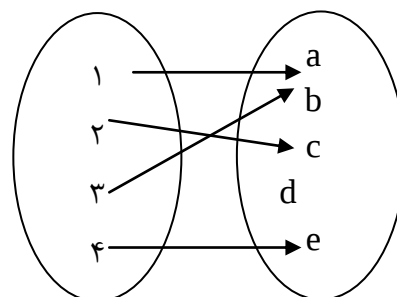
نکات مربوط به تابع یک به یک:

(۱) تشخیص تابع یک به یک از روی نمودار پیکانی:

فرض کنیم تابع f از مجموعه A به روی B تعریف شده باشد. نمودار پیکانی تابع f موقعی یک به یک بودن تابع را نشان می دهد که به هریک از عضوهای مجموعه B حداکثر یک پیکان وارد شده باشد.



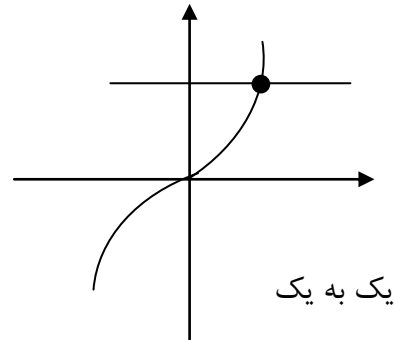
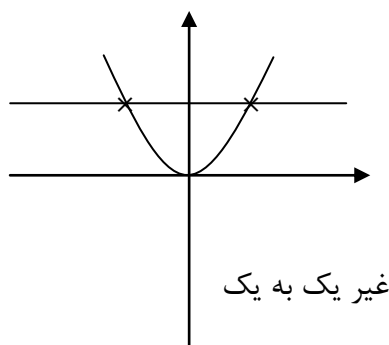
یک به یک



غیر یک به یک

(۲) تشخیص تابع یک به یک از روی نمودار مختصاتی:

هر خط موازی با محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



(۳) اگر تابع f اکیداً یکنوا (همواره صعودی یا همواره نزولی) باشد، آن گاه یک به یک است.

📌 نکته) برای تشخیص تابع یک به یک از روی ضابطه‌ی آن ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم اگر مشتق تابع همواره مثبت یا همواره منفی باشد نتیجه می‌گیریم که تابع اکیداً یکنوا بوده و در نتیجه همواره یک به یک است.

$$y = x^5 + 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad y' = 5x^4 + 3 > 0 \quad (\text{مثال } ۲۰۰)$$

چون مشتق تابع همواره مثبت است، بنابراین تابع $y = x^5 + 3x - 2$ همواره یک به یک است.

📌 نکته: توابع چند ضابطه‌ای تحت دو شرط زیر یک به یک هستند:

(الف) هر ضابطه در دامنه خود یک به یک باشد.

(ب) اشتراک بردها تهی باشد.

□ تست ۲۰۱ اگر تابع $\{(-2,2), (m,3), (-1,3), (2m,a)\}$ یک به یک باشد، a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

□ تست ۲۰۲ اگر رابطه‌ی $f = \{(3,2), (a,5), (3,a^2 - a)(b,2), (-1,4)\}$ تابع یک به یک باشد،

دوتایی (a,b) کدام است؟

- (۱) $(-1,1)$ (۲) $(-1,3)$ (۳) $(2,1)$ (۴) $(2,3)$

□ تست ۲۰۳ تابع با کدام ضابطه‌ی زیر، یک به یک است؟

(۱) $y = |x|$ (۲) $y = x^2$

(۳) $y = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ (۴) $y = \begin{cases} -x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

□ تست ۲۰۴) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x \geq 1 \\ 2x - a & x < 1 \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود a کدام است؟

(نرنام خیلی سبز)

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\emptyset$ ۳) $[-3, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -3]$

□ تست ۲۰۵) اگر تابع $f(x) = x^2 + (a+1)x + 3$ برای $x \geq 3$ یک به یک باشد، کم ترین مقدار a کدام است؟ (قلم چی ۹۶)

(تمرین)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) -6 ۳) -5 ۴) -7

□ تست ۲۰۶) تابع $y = |x + 2|$ در کدام بازه زیر یک به یک است؟ (مهر و ماه)

۱) $(-\infty, 0)$ ۲) $(-4, 4)$ ۳) $(0, \infty)$ ۴) $(-\infty, 2)$

□ تست ۲۰۷) چه تعداد از توابع زیر یک به یک نمی باشد؟ (گاج ۹۹)

$$y = x + \frac{|x|}{x} \quad (۲)$$

$$y = x^2 - 6x + ۱ \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+۱ & x \leq -۱ \\ x & x \geq ۰ \end{cases} \quad (۴)$$

$$y = x - \frac{|x|}{x} \quad (۳)$$

۴(۴

۳(۳

۲(۲

۱(۱

معکوس (وارون) تابع:

تعریف: معکوس تابع f به صورت مقابل تعریف می گردد.

$$f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$$

☞ نکته: شرط معکوس پذیری یک تابع این است که آن تابع یک به یک باشد.

محاسبه ی ضابطه ی معکوس تابع:

(۱) جای x و y را با هم عوض می کنیم.

(۲) y را بر حسب x می یابیم.

(۳) در آخر به جای y ، f^{-1} قرار می دهیم.

📖 مثال ۲۰۸) ضابطه‌ی معکوس تابع $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ را به دست آورید.

📐 تست ۲۰۹) نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را به کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱-۴ و ۱-۱ ۳-۴ و ۱ ۲-۴ و ۱-۱ ۴-۴ و ۱

پاسخ: گزینه ۲

کافی است ضابطه‌ی تابع f^{-1} را به دست آورده و سپس ضابطه‌ها را برابر قرار دهیم:

$$y = f(x) = \frac{x+4}{x-2} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ رو عوض کن}} x = \frac{y+4}{y-2}$$

$$\xrightarrow{\text{y رو پیدا کن}} y - 2x = y + 4$$

طرفین وسطین

$$\xrightarrow{\text{y رو تنها کن}} xy - y = 2x + 4 \Rightarrow y(x-1) = 2x + 4$$

$$\xrightarrow{\text{y رو پیدا کن}} y = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x)$$

حالا تلاقی دو تابع f و f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{2x+4}{x-1} = \frac{2x+4}{x-1}$$

طرفین وسطین

$$\longrightarrow (x+4)(x-1) = (x-2)(2x+4)$$

ساده کن

$$\longrightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 + 4x - 4x - 8$$

مرتب کن

$$\longrightarrow 0 = 2x^2 - 8 - x^2 - 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

تجزیه کن

$$\longrightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

□ تست ۲۱۰ وارن تابع $y = \frac{2x-1}{x-2}$ خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می کند؟ (IQ گاج)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

□ تست ۲۱۱ تابع $f(x) = \frac{ax+2}{x+2}$ نسبت به نیم ساز ربع اول و سوم تقارن دارد. حاصل

$f^{-1}(-2)$ کدام است؟ (متنا ۹۳) (تمرین)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) -۸

□ تست ۲۱۲ در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

(۱) تعریف نشده (۲) -۵ (۳) -۲ (۴) -۸

پاسخ: گزینه ۳

$$f^{-1}(4) = x \Rightarrow f(x) = 4$$

$$4 = -x + \sqrt{-2x} \Rightarrow \sqrt{-2x} = x + 4 \Rightarrow \text{توان } 2 \Rightarrow -2x = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{با جاگذاری در تابع اصلی، عرض تابع چهار خواهد شد} \rightarrow x = -2 \\ \text{با جاگذاری در تابع اصلی، عرض تابع چهار نخواهد شد} \rightarrow x = -8 \end{cases}$$

□ تست ۲۱۳ ضابطه‌ی معکوس تابع $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ کدام است؟

$$(1) \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x} \quad (2) \quad f^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{x+1}$$

$$(3) \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} - 1 \quad (4) \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

نکات مهم در تابع معکوس:

$$(1) (a, b) \in f \Rightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

$$(2) R_{f^{-1}} = D_f$$

(3) نمودار f و f^{-1} نسبت به نیم‌ساز ناحیه اول و سوم (خط $y = x$) قرینه یکدیگرند.

(4) نمودار f و f^{-1} عموماً یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند.

$$(5) (fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

□ تست ۲۱۴) نمودار وارون تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ در فاصله $[a, b]$ زیر محور x ها قرار می

(منتشران)

گیرد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$$-\sqrt{3}(4)$$

$$3(3)$$

$$\sqrt{3}(2)$$

$$2\sqrt{3}(1)$$

□ تست ۲۱۵) اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ کدام

(تجربی ۹۹)

است؟

$$14(4)$$

$$13(3)$$

$$11(2)$$

$$10(1)$$

□ تست ۲۱۶ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(2) + g(15)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹) (تمرین)

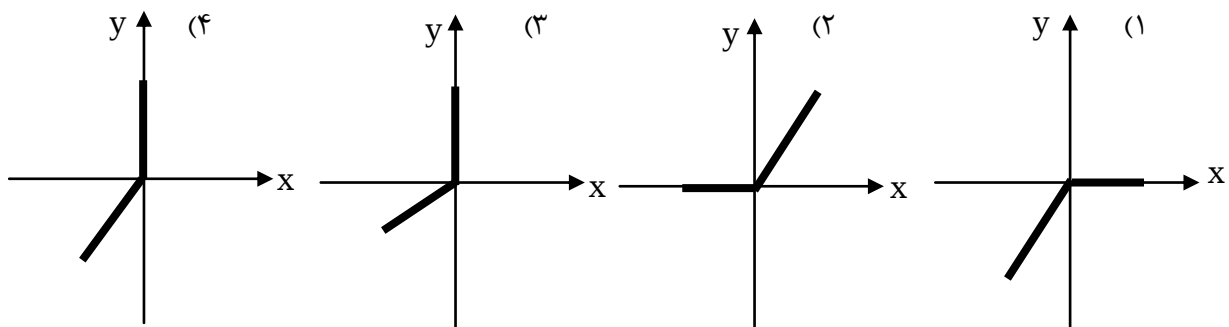
۸(۴)

۱۰(۳)

۱۱(۲)

۱۲(۱)

□ تست ۲۱۷ نمودار معکوس تابع $y = x - |x|$ کدام است؟



□ تست ۲۱۸ نمودار تابع $y = -x|x|$ وارونش را در چند نقطه قطع می کند؟ (حلی سنج ۹۹)

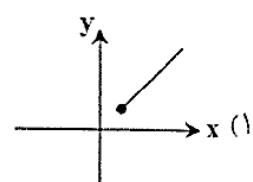
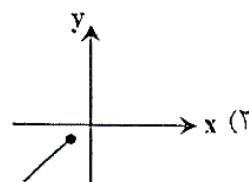
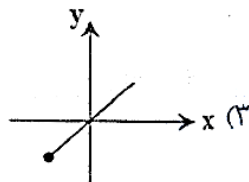
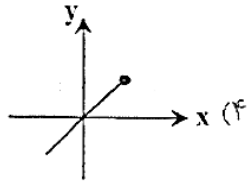
۴(۴)

۳(۳)

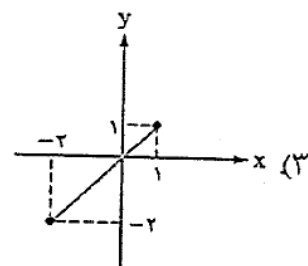
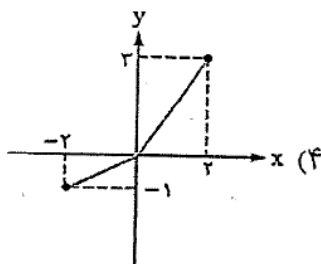
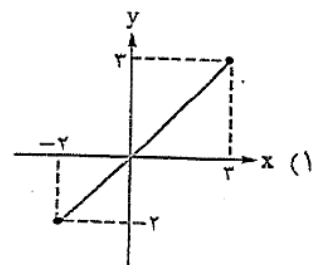
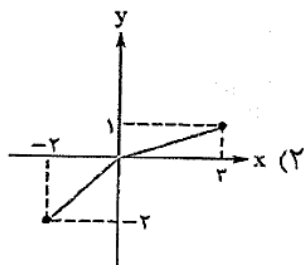
۲(۲)

۱(۱)

□ تست ۲۱۹ اگر $f(x) = x^2 + 4x + 5$ تابعی با دامنه $(-\infty, -2]$ باشد، نمودار تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۹)



□ تست ۲۲۰ نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ به شکل زیر است. نمودار تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ کدام است؟ (قلم چی ۹۹) (تمرین)



□ تست ۲۲۱ اگر $f = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ و $g = \{(0,2), (1,7), (9,10)\}$ آن گاه $f \circ g^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(2,2)\}$ (۲) $\{(2,7)\}$ (۳) $\{(7,2)\}$ (۴) $\{(0,1)\}$

□ تست ۲۲۲ ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است.

(سراسری تجربی ۹۲)

- (۱) $y = x^2 - 4x + 5 \quad x \leq 2$ (۲) $y = -x^2 + 4x - 5 \quad x \leq 2$
(۳) $y = x^2 - 4x + 5 \quad x \geq 1$ (۴) $y = -x^2 + 4x - 5 \quad x \geq 1$

□ تست ۲۲۳) اگر ضابطه تعریف f و g به صورت $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = 2 + x$ باشد ضابطه

تابع معکوس $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ (۲) $y = 3x - 4$
- (۳) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ (۴) $y = 3x + 4$

□ تست ۲۲۴) قرینه ی خط به معادله $y = 3x - 2$ را نسبت به خط $y = x$ خط d می نامیم.

عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (تجربی ۹۷)

(تمرین)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

□ تست ۲۲۵) ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

- (۱) $y = \frac{x}{1-|x|} \quad |x| < 1$ (۲) $y = \frac{1-|x|}{|x|} \quad |x| > 1$ (۳) $y = \frac{x}{|x|-1} \quad |x| > 1$ (۴) $y = \frac{|x|-1}{x} \quad |x| < 1$

□ تست ۲۲۶ ضابطه معکوس تابع $f(x) = 5 + 10^{x-1}$ کدام است؟

(۲) $y = 5 + \log(x - 1)$

(۱) $y = 1 + \log(x - 5)$

(۴) $y = 5 - \log(x - 1)$

(۳) $y = 1 - \log(x - 5)$

□ تست ۲۲۷ معکوس تابع $y = x^2 + x - 5$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

(۴) $(-2, -5)$

(۳) $(-3, 1)$

(۲) $(2, 5)$

(۱) $(0, 5)$

□ تست ۲۲۸ وارون تابع $y = x^2 - x + 1$ از کدام نقطه عبور میکند؟ (تجربی ۱۴۰۱) (تمرین)

(۴) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

(۳) $(1, 2)$

(۲) $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$

(۱) $(-2, -1)$

□ تست ۲۲۹ اگر $f(x) = 2x - 1$ باشد، به ازای کدام مقادیر x ، تساوی $\frac{1}{f(x)} = f^{-1}(x)$

(کاج ۹۹)

برقرار است؟

(۴) هر مقدار x

(۳) هیچ مقدار x

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) 1 و $-\frac{1}{2}$

□ تست ۲۳۰ فاصله‌ی نقطه برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه‌ی برخورد

معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است؟

(۴) $2\sqrt{2}$

(۳) ۲

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) ۱

□ تست ۲۳۱ فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+2} - 1$ به تابع وارون خود باشد.

فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

(تمرین)

(۴) $2\sqrt{2}$

(۳) ۳

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

□ تست ۲۳۲ اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3; x \geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-1}, g(x) = \frac{x-9}{4}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟
(تجربی ۹۸)

۱۲(۱) ۱۵(۲) ۱۸(۳) ۲۱(۴)

□ تست ۲۳۳ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{ax^2} + b$ نمودار وارون خودش را در نقطه ی (۰ و ۲) قطع می کند. مقدار ab کدام است؟
(قلم چی ۹۶)

-۱(۱) -۲(۲) -۴(۳) -۸(۴)

□ تست ۲۳۴ تابع $f(x) = a + b \left(\frac{1}{2}\right)^x$ از مبدأ مختصات عبور می کند. اگر $f^{-1}(-1) = -1$ باشد، حاصل $a-b$ چقدر است؟
(تجربی ۱۴۰۱)

۱(صفر) ۱(۲) ۲(۳) ۳(۴)

□ تست ۲۳۵) قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل از ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می دهیم و آن را $y=g(x)$ می نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

- ۳(۱) -۳(۲) -۲(۳) -۴(۴)

□ تست ۲۳۶) اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ آن گاه ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- ۱(۱) $x-1$ ۲(۲) $x+1$ ۳(۳) x^2-1 ۴(۴) x^2+1

□ تست ۲۳۷) اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$ باشد، دامنه $g(x) = f \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟

(سنجش ۹۹) (تمرین)

- ۱(۱) $[3, +\infty)$ ۲(۲) $(-\infty, 2]$ ۳(۳) $(-\infty, 3]$ ۴(۴) $\mathbb{R}$

□ تست ۲۳۸ اگر $f(x) = \frac{1}{5}x - 4$ و $g(x) = x^2 + x$ باشند مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۳(۴)

۲/۵(۳)

۲(۲)

۱/۵(۱)

□ تست ۲۳۹ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{3x+6}{1-x}$ باشند مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹) (تمرین)

$\frac{2}{3}(4)$

$\frac{2}{3}(3)$

$\frac{2}{5}(2)$

$\frac{2}{5}(1)$

□ تست ۲۴۰ دو تابع با ضابطه های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & ; x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$

(ریاضی خارج ۹۳)

مفروض اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

۴(۴)

۲(۳)

-۱(۲)

-۴(۱)

□ تست ۲۴۱ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند.
اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد. a کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$$\frac{5}{2}(4)$$

$$\frac{3}{2}(3)$$

$$\frac{3}{2}(2)$$

$$\frac{1}{2}(1)$$

□ تست ۲۴۲ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟

$$\{(2, 4), (3, 5)\} (2)$$

$$\{(1, 3), (0, 0)\} (1)$$

$$\{(5, 3), (-1, 1)\} (4)$$

$$\{(2, 0), (-1, 4)\} (3)$$

□ تست ۲۴۳ اگر $g(x) = 1 + \sqrt{x}$, $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ضابطه تابع $y = (g \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟ (گزینه دو ۹۹)

(تمرین)

$$y = 1 + \sqrt{1 - x^2} (4)$$

$$y = x + 2 (3)$$

$$y = 2 - x (2)$$

$$y = x (1)$$

□ تست ۲۴۴ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشد.

(ریاضی ۹۸)

تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

(۲) $\{(3, 5) \text{ و } (4, 2)\}$

(۱) $\{(4, 2) \text{ و } (5, 2)\}$

(۴) $\{(3, 5) \text{ و } (2, 4)\}$

(۳) $\{(5, 2) \text{ و } (2, 4)\}$

□ تست ۲۴۵ اگر $f^{-1} = \{(2, 3) \text{ و } (1, -1) \text{ و } (0, 2) \text{ و } (-1, 0)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{f^{-1}}{f}$

(تمرین)

شامل کدام زوج مرتب است؟ (قلم چی ۹۶)

(۴) $(0 \text{ و } -1)$

(۳) $(-4 \text{ و } 0)$

(۲) $(0 \text{ و } -1)$

(۱) $(0 \text{ و } 4)$

(گاج ۹۹)

□ تست ۲۴۶ اگر $f(x) = x^2 - 3x^2 + 3x$ باشد، $f^{-1}\left(\frac{19}{27}\right)$ چقدر است؟

$\frac{1}{3}(4)$

$\frac{1}{2}(3)$

$\frac{1}{4}(2)$

$\frac{1}{5}(1)$

□ تست ۲۴۷ اگر $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$, $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ باشد، آن گاه $g^{-1}(۶)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۴(۴

۳(۳

۲(۲

۱(۱

□ تست ۲۴۸ اگر $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$, $g(x) = f(۳x - ۴)$ باشد، آن گاه حاصل $g^{-1}(۱۶)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۹) (تمرین)

۸(۴

۷(۳

۶(۲

۵(۱

□ تست ۲۴۹ وارون تابع $y = \sqrt{x - ۲\sqrt{x - ۱}}$ کدام است؟ ($۱ < x < ۲$) (نردبان خیلی سبز)

$$y = x^2 - ۲x(۲$$

$$y = x^2 - ۲x + ۲(۱$$

$$y = x^2 + ۲x + ۲(۴$$

$$y = x^2 + ۲x(۳$$

□ تست ۲۵۰) نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است.

(ریاضی ۹۴)

ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

$$y = -x + 5; x > 2 \quad (2)$$

$$y = -x + 6; x < -4 \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 1; -4 \leq x \leq 10 \quad (4)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 1; -4 < x < 2 \quad (3)$$

□ تست ۲۵۱) نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار تابع f^{-1} در چند نقطه این نمودار راقطع

(موج آزمون الگو)

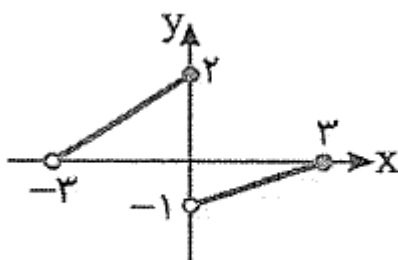
می کند؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱



□ تست ۲۵۲ نمودار وارون تابع $y = (x - 2)^2 - 1$ از کدام نواحی مختصات می گذرد؟

(۱) دوم و چهارم (۲) اول و سوم (۳) اول و دوم و سوم (۴) دوم و سوم و چهارم

□ تست ۲۵۳ برد وارن تابع $f(x) = 5\sqrt{(2-x)^2} + 1$ کدام گزینه است؟ (مهر و ماه) (تمرین)

(۱) $[5, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 2)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $[2, 5]$

□ تست ۲۵۴ اگر ضابطه وارون تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 2 (x \geq 1)$ به صورت

$f^{-1}(x) = a + \sqrt{bx + c}$ باشد، مقدار abc کدام است؟ (گزینه دو ۱۴ آبان ۱۴۰۰)

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

□ تست ۲۵۵ دامنه وارون تابع f با ضابطه $f(x) = -2x^2 + 12x - 4; x \geq 3$ کدام است؟
(قلم چی ۹۹)

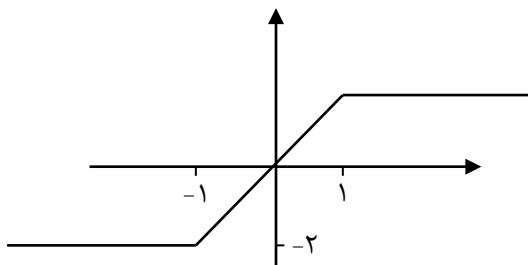
- (۱) $(-\infty, 7]$ (۲) $(-\infty, 14]$ (۳) $[14, +\infty)$ (۴) $[7, +\infty)$

صعود و نزول :

تعریف تابع صعودی: تابع f را در بازه $[a, b] \in D_f$ صعودی گویند هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \text{اگر} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

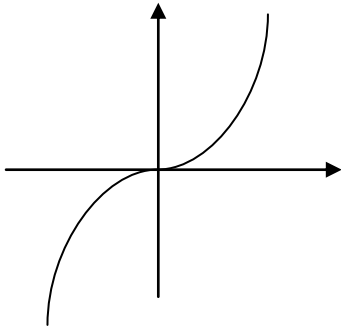
- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-1|$ که صعودی است



تعریف تابع صعودی اکید: تابع f را در بازه‌ی $[a, b] \subset D_f$ صعودی اکید گویند هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \text{اگر} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ که صعودی اکید است.



مثال ۲۵۶ ثابت کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$ در $\mathbb{R}$ صعودی اکید است:

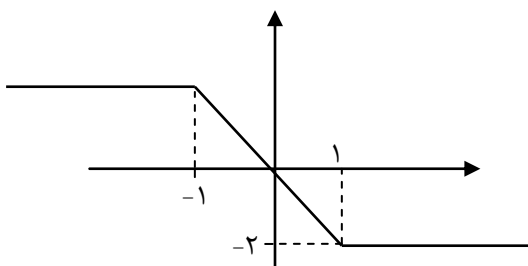
$$\begin{aligned} \text{حل: } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1 + 2} < \sqrt[3]{x_2 + 2} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{x_1 + 2} - 1 < \sqrt[3]{x_2 + 2} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

پس تابع f صعودی اکید است.

تعریف تابع نزولی: تابع f را در بازه‌ی $[a, b] \subset D_f$ نزولی گویند هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \text{اگر} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

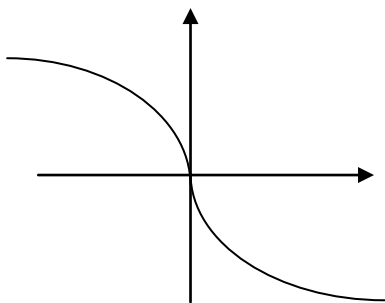
- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x-1| - |x+1|$ که نزولی است



تعریف تابع نزولی اکید: تابع f را در بازه‌ی $[a, b] \subset D_f$ نزولی اکید گویند هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \text{اگر} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = -\sqrt[3]{x}$ که نزولی اکید است



📖 مثال (۲۵۷) ثابت کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ در $\mathbb{R}$ نزولی اکید است؟

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow (1 - x_1)^3 > (1 - x_2)^3 \\ \Rightarrow (1 - x_1)^3 - 2 > (1 - x_2)^3 - 2 &\Rightarrow -x_1^3 + 3x_1^2 - 3x_1 - 1 > -x_2^3 + 3x_2^2 - 3x_2 - 1 \\ \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) &\Rightarrow \text{نزولی اکید} \end{aligned}$$

🔗 چند نکته درباره‌ی صعود و نزول توابع:

(۱) تابع ثابت با ضابطه‌ی $f(x) = c$ هم صعودی و هم نزولی است زیرا در هر دو تعریف تابع صعودی و نزولی صدق می‌کند.

(۲) تابع f را بر بازه‌ی $[a, b]$ یکنوا گویند هرگاه تابع f در این بازه صعودی یا نزولی باشد.

۳) اگر توابع f و g روی بازه‌ی $[a, b]$ یکنوای اکید باشند آنگاه تابع $f + g$ روی همان بازه یکنوای اکید است و در مورد توابع $f - g$ ، $f \cdot g$ ، $\frac{f}{g}$ نمی‌توان نتیجه کلی گرفت.

📖 مثال) توابع با ضابطه‌های زیر در دامنه‌های مشخص شده صعودی اند:

۲۵۸) $f(x) = x^2$	$x \in [0, +\infty)$	۲۵۹) $f(x) = x + x $	$x \in \mathbb{R}$
۲۶۰) $f(x) = [x]$	$x \in \mathbb{R}$	۲۶۱) $f(x) = \frac{-1}{x}$	$x \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$
۲۶۲) $f(x) = \sqrt[3]{x}$	$x \in \mathbb{R}$	۲۶۳) $f(x) = \sin x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

📖 مثال) توابع با ضابطه‌های زیر در دامنه‌های مشخص شده نزولی اند:

۲۶۴) $g(x) = -x^3$	$x \in \mathbb{R}$	۲۶۵) $g(x) = [-x]$	$x \in \mathbb{R}$
۲۶۶) $g(x) = \frac{1}{x}$	$x \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$	۲۶۷) $x^2 - 1 = g(x)$	$x \in (-\infty, 0]$
۲۶۸) $g(x) = \cos x$	$x \in [0, \pi]$		

📌 تست ۲۶۹) تابع با ضابطه $f(x) = |x^2|$ با دامنه R چگونه است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون ناپذیر ۴) یک به یک

پاسخ گزینه ۳

این تابع، غیر یک به یک و در نتیجه وارون ناپذیر است.

(IQ گاج)

□ تست ۲۷۰ تابع $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ در کدام بازه یکنوا است؟

(۴) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(۳) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(۲) $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$

(۱) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

□ تست ۲۷۱ تابع f روی R اکیداً نزولی است و $f(2x+2) < f(x^2-1)$ حدود x کدام است؟ (مبتکران ۹۹)

(تمرین)

(۲) $(-1, 3)$

(۱) $(-2, 4)$

(۴) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

□ تست ۲۷۲ اگر نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ اکیداً یکنوا باشد، a چند مقدار

(سنجش ۹۹)

صحیح می تواند اختیار کند؟

(۴) ۳

(۳) ۱

(۲) بی شمار

(۱) ۰

□ تست ۲۷۳ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x \geq 1 \\ 2x - a & x < 1 \end{cases}$ یکنوا باشد، حدود a کدام است؟

(منتشران)

(تمرین)

$\mathbb{R}$ (۱) $\emptyset$ (۲) $[-3, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -3]$ (۴)

□ تست ۲۷۴ به ازای چند مقدار صحیح برای m تابع $f\{(-3, 5m-4), (0, m^2), (m^2, 16)\}$

تابعی صعودی است؟

(مدارس برتر ۹۹)

۸(۱) ۷(۲) ۶(۳) ۵(۴)

□ تست ۲۷۵ اگر $f = \left\{(-1, 4), (1, b), \left(\frac{1}{2}, 4\right), \left(0, \frac{a}{2}\right)\right\}$ تابعی صعودی باشد، کمترین مقدار

$a+b$ کدام است؟ (۱۹ گاج)

(تمرین)

۳(۱) ۶(۲) ۱۲(۳) ۸(۴)

□ تست ۲۷۶) کدام تابع اکیداً یکنوا است؟

(گزینه دو ۹۹)

$$y = x + 2|x| \quad (۲)$$

$$y = x + |x - 2| \quad (۱)$$

$$y = 2x + |x| \quad (۴)$$

$$y = |x| + x - 2 \quad (۳)$$

□ تست ۲۷۷) حدود K برای آن که تابع $y = (k - 2)x^2 - x$ در فاصله $[1, +\infty)$ صعودی

(نردبان خیلی سبز)

باشد، کدام است؟

$$k > 2 \quad (۴)$$

$$k < \frac{5}{4} \quad (۳)$$

$$2 \leq k \leq \frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$k \geq \frac{5}{4} \quad (۱)$$

□ تست ۲۷۸ اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه $y = \sqrt{f(x^2 - 1) - f(x + 1)}$ تابع کدام است؟
(مهر و ماه)

- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $(-2, 1]$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $[-2, 1]$

□ تست ۲۷۹ اگر تابع $y = f(x)$ یک تابع اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، به طوری که $f(2) = 0$ دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x+2}}$ کدام است؟ (۱۹ گاج)
(تمرین)

- (۱) $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$ (۲) $(-1, 3)$
(۳) $(-2, 2)$ (۴) $[-2, 2]$

□ تست ۲۸۰ تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^2 + 5$ اکیداً نزولی است مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟
(تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

□ تست ۲۸۱ تابع $f(x) = x|x+1| - 3x$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)
(تمرین)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

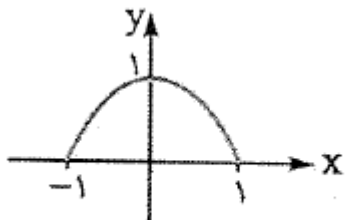
□ تست ۲۸۲ اگر $f(x)$ تابع اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(-x^2 + 1)$ چگونه تابعی است؟
۱) اکیداً نزولی ۲) اکیداً صعودی ۳) غیر یکنوا ۴) نامشخص

□ تست ۲۸۳ هر گاه $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ ، $g(x) = \{(-1, 2), (5, 2), (1, 0), (3, 2)\}$ باشند،
آن گاه $f \circ g$ چگونه تابعی است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) صعودی اکید (۲) نزولی اکید (۳) غیر یکنوا (۴) هم صعودی و هم نزولی

□ تست ۲۸۴ اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد تابع $f \circ f$ چگونه است؟ (قلم چی ۹۹)

(۱) صعودی (۲) نزولی
(۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی



□ تست ۲۸۵) تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ چگونه است؟ (قلم چی ۹۴)

۱) یک به یک - صعودی

۲) یک به یک - نزولی

۳) غیر یک به یک - صعودی

۴) غیر یک به یک - نزولی

□ تست ۲۸۶) وضعیت یکنوایی تابع $f(x) = x^2 + 6x^2 + 12x - 1$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

(IQ گاج) (تمرین)

۱) ابتدا صعودی اکید، سپس نزولی اکید

۲- ابتدا نزولی اکید، سپس صعودی اکید

۳- صعودی اکید

۴- نزولی اکید

□ تست ۲۸۷) تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 1$ از نظر یکنوایی کدام است؟ (IQ گاج)

۱) ابتدا نزولی سپس صعودی

۲) ابتدا صعودی سپس نزولی

۳) نزولی

۴) صعودی

□ تست ۲۸۸ تابع با ضابطه ی $f(x) = |x + ۲| + |x - ۱|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

(تجربی ۹۸)

- (۱) $(-۲ و -۱)$ (۲) $(۱ و -۱)$ (۳) $(۳ و -۲)$ (۴) $(۱ و +۱)$

□ تست ۲۸۹ تابع یک ضابطه $f(x) = (x - ۳)(x + ۲) + ۲$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟
(میکروگاج)

- (۱) $(۰ و -۱)$ (۲) $(۰ و +۱)$ (۳) $(۲ و ۰)$ (۴) $(۳ و -۲)$

□ تست ۲۹۰ تابع با ضابطه $f(x) = |x + ۱| - |x - ۲|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(تجربی خارج ۹۸) (تمرین)

- (۱) $(-۱ و -۲)$ (۲) $(۱ و -۱)$ (۳) $(۳ و -۲)$ (۴) $(۲ و +۱)$

□ تست ۲۹۱) نمودار تابع $f(x) = |x + 2| - |x - 3|$ در فاصله است. (قلم چی ۹۹)

- (۱) $(-2, 3)$ ، اکیداً صعودی
 (۲) $(3, -2)$ ، اکیداً نزولی
 (۳) $(-2, +\infty)$ ، اکیداً صعودی
 (۴) $(-2, +\infty)$ ، اکیداً نزولی

□ تست ۲۹۲) اگر بزرگ ترین بازه ای که تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ در آن اکیداً نزولی است، به صورت $[5, -3]$ باشد، دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟ (تمرین)

(قلم چی ۹۹)

- (۱) $(-5, 3)$ (۲) $(-3, 5)$ (۳) $(3, -5)$ (۴) $(5, -3)$

□ تست ۲۹۳) در بازه ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| - |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی ۹۷)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه ی مشترک

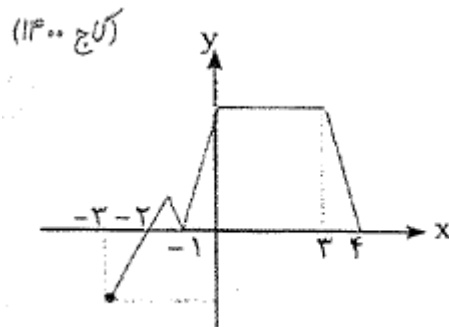
□ تست ۲۹۴ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. اگر f در بازه $[-1, b]$ صعودی و در بازه $[0, a]$ نزولی باشد، بیشترین مقدار $a+b$ چقدر است؟
(گاج ۱۴۰۰)

۹(۴

۸(۳

۶(۲

۷(۱



□ تست ۲۹۵ اگر دو تابع f به ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی باشند، کدام یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟
(میکرو گاج)

$g-f(۴$

$g \circ f(۳$

$f-g(۲$

$f \cdot g(۱$

